Fonctions de Mathieu associées périodiques, équation différentielle de Mathieu associées, solutions périodiques

Je vais présenter dans ce chapitre une extension des fonctions de Mathieu, dont il est en général peu fait mention, tout du moins dans des articles récents. Ce sont les fonctions de Mathieu associées dont l'équation différentielle est la suivante : $g''(t)+\left(a-2q\ Cos(2t)-\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Sin^2(t)}\right)g(t)=0$

D'autres fonctions de Mathieu associées intermédiaires sont liées aux deux équations différentielles équivalente : $\begin{cases} u''(t)+2\Lambda\ Cotan(t)\,u'(t)+\left(a-\Lambda^2-2q\ Cos(2t)\right)u(t)=0 \\ u''(t)-2\Lambda\ Tan(t)\,u'(t)+\left(a-\Lambda^2-2q\ Cos(2t)\right)u(t)=0 \end{cases}$

Voici à ce jour de la rédaction de ce document les références que j'ai pu trouver dans la littérature scientifique à leur propos :
- une article de 1921 de P.Humbert : « On-Mathieu-Functions-of-Higher-Order »
- un article de 1923 de E.L.Ince, « Associated Mathieu Functions », Proc. Edinb. Math. Soc., XLI
- un article de 1926 de P.Humbert, « XVII.—Some Hyperspace Harmonic Analysis Problems introducing Extensions of Mathieu's Equation »
- un livret de 1926 de P.Humbert, « Fonctions de Lamé et fonctions de Mathieu », pages 39 à 40
- un livret de 1936 de P.Humbert, «Potentiels et prepotentiels », avec des mentions formelles mais non étudiées spécifiquement en pages 32, 33, 50, 51
- 4 articles de R.Campbell, 1949, « Sur une expression remarquable des solutions de période 2kπ de l'équation de Mathieu associée », 1950, « COMPORTEMENT DES FONCTIONS DE MATHIEU ASSOCIÉES POUR LES GRANDES VALEURS DES PARAMÈTRES », 1950, « CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE MATHIEU ASSOCIÉE » et 1950, « Équations intégrales des fonctions de Mathieu associées et applications »

Ces deux équations sont des équations de Hill soit des équations différentielles dont les coefficients du terme de dérivée première et de dérivée d'ordre 0 sont des fonctions périodiques de t. Ici la période est 2π, il est donc naturel de rechercher d'abord des solutions de ces équations de périodes π ou 2π.

Ces équations différentielles sont intimement liées à l'équation des ondes sphéroïdales. C'est d'ailleurs une des voies originales pour leur introduction, tout comme pour l'équation de Mathieu qui en est aussi un cas particulier.

Lorsque le paramètre Λ=0 ou Λ=1, l'équation de Mathieu associée devient l'équation de Mathieu.

$$g''(t)+\left(a-2q\ Cos(2t)-\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Sin^2(t)}\right)g(t)=0$$

Lorsque le paramètre Λ=0, les deux équations intermédiaires de Mathieu associée deviennent respectivement des équations de Mathieu : $\Lambda=0\Rightarrow\begin{cases} u_1''(t)+\left(a-2q\ Cos(2t)\right)u_1(t)=0 \\ u_2''(t)+\left(a-2q\ Cos(2t)\right)u_2(t)=0 \end{cases}$

Voyons comment E.L.Ince dans son article véritablement introductif parvient à les obtenir à partir de l'équation des ondes sphéroïdales.

Lien des fonctions de Mathieu associées (intermédiaires ou non) avec les fonctions sphéroïdales

Une des formes de Liouville de l'équation des ondes sphéroïdales est obtenue avec le changement de variable x=Cos(t) :

$$(1-x^2)\frac{d^2y(x)}{dx^2}-2x\frac{dy(x)}{dx}+\left(\omega+\gamma^2(1-x^2)-\frac{\mu^2}{1-x^2}\right)y(x)=0 \qquad x=Cos(t)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y(x)=Sin^{\mu}(t)w(t)\rightarrow w''(t)+(2\mu+1)\,Cotan(t)\,w'(t)+\left(\omega-\mu(\mu+1)+\gamma^2Sin^2(t)\right)w(t)=0 \\ y(x)=Sin^{-\mu}(t)w(t)\rightarrow w''(t)+(1-2\mu)\,Cotan(t)\,w'(t)+\left(\omega+\mu(1-\mu)+\gamma^2Sin^2(t)\right)w(t)=0 \end{cases}$$

Une forme équivalente est obtenue avec y=Sin(t) :

$$(1-x^2)\frac{d^2y(x)}{dx^2}-2x\frac{dy(x)}{dx}+\left(\omega+\gamma^2(1-x^2)-\frac{\mu^2}{1-x^2}\right)y(x)=0 \qquad x=Sin(t) \qquad y(x)=\left(Cos^2(t)\right)^{\pm\frac{\mu}{2}}w(t)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} w''(t)-(1+2\mu)\,Tan(t)\,w'(t)+\left(\omega-\mu(\mu+1)+\gamma^2Cos^2(t)\right)w(t)=0 \\ w''(t)-(1-2\mu)\,Tan(t)\,w'(t)+\left(\omega+\mu(1-\mu)+\gamma^2Cos^2(t)\right)w(t)=0 \end{cases}$$

Selon un article de 1923 de E.L.Ince, « Associated Mathieu Functions », le point de départ est la forme de Liouville x=Cos(t) suivante :

$$x=Cos(t) \qquad y(x)=\left(Sin^2(t)\right)^{-\frac{1}{4}}g(t) \qquad g''(t)+\left(\omega+\frac{1}{4}+\frac{\gamma^2}{2}-\frac{\gamma^2}{2}Cos(2t)-\frac{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\left(\mu-\frac{1}{2}\right)}{Sin^2(t)}\right)g(t)=0$$

$$Posons \quad \Lambda=\mu+\frac{1}{2} \qquad q=-\frac{\gamma^2}{4} \qquad a=\omega+\frac{1}{4}+\frac{\gamma^2}{2}\Rightarrow g''(t)+\left(a+2q\,Cos(2t)-\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Sin^2(t)}\right)g(t)=0$$

E.L.Ince réalise deux transformations supplémentaires :

$$\begin{cases} g(t)=\left(Sin^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}}u_1(t)\Rightarrow y(x)=\left(Sin^2(t)\right)^{-\frac{1}{4}}g(t)=\left(Sin^2(t)\right)^{\frac{2\Lambda-1}{4}}u_1(t)=\left(Sin^2(t)\right)^{\frac{\mu}{2}}u_1(t) \\ g(t)=\left(Sin^2(t)\right)^{\frac{1-\Lambda}{2}}u_2(t)\Rightarrow y(x)=\left(Sin^2(t)\right)^{-\frac{1}{4}}g(t)=\left(Sin^2(t)\right)^{-\frac{2\Lambda-1}{4}}u_2(t)=\left(Sin^2(t)\right)^{-\frac{\mu}{2}}u_2(t) \end{cases}$$

Ces transformations nous ramènent exactement à la première forme de Liouville proposée avec x=Cos(t), à savoir des fonctions solutions des équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} u_1''(t)+2\Lambda\,Cotan(t)\,u_1'(t)+\left(a-\Lambda^2+2q\,Cos(2t)\right)u_1(t)=0 \\ u_2''(t)+2(1-\Lambda)\,Cotan(t)\,u_2'(t)+\left(a-(1-\Lambda)^2+2q\,Cos(2t)\right)u_2(t)=0 \end{cases}$$

Si l'on pose $\Lambda=\frac{1}{2}-\mu$*, le système d'équations est identique car l'équation est invariante par le changement* $\Lambda\rightarrow1-\Lambda\Leftrightarrow\mu\rightarrow-\mu$*. On arrive donc à ces deux formes proposées par E.L.Ince :*

$$\Lambda=\frac{1}{2}-\mu \qquad \begin{cases} y(x)=\left(Sin^2(t)\right)^{\frac{2\Lambda-1}{4}}u_1(t)=\left(Sin^2(t)\right)^{-\frac{\mu}{2}}(t)\,u_1(t) \\ y(x)=\left(Sin^2(t)\right)^{-\frac{2\Lambda-1}{4}}u_2(t)=\left(Sin^2(t)\right)^{\frac{\mu}{2}}u_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1''(t)+2\Lambda\,Cotan(t)\,u_1'(t)+\left(a-\Lambda^2+2q\,Cos(2t)\right)u_1(t)=0 \\ u_2''(t)+2(1-\Lambda)\,Cotan(t)\,u_2'(t)+\left(a-(1-\Lambda)^2+2q\,Cos(2t)\right)u_2(t)=0 \end{cases}$$

Remarque importante : dans ce qui suit c'est le choix $\Lambda=\frac{1}{2}-\mu$ ***qui est retenu.***

Remarque : sur cette généralisation de l'équation de Mathieu on remarquera que le paramètre q est de signe inverse dans l'article de E.L.Ince. En effet communément l'équation de Mathieu se note : $y''(t)+(a-2q\,Cos(2t))\,y(t)=0$*, et par extension l'équation intermédiaire de Mathieu associée :* $y''(t)+2\Lambda\,Cotan(t)\,y'(t)+(a-\Lambda^2-2q\,Cos(2t))\,y(t)=0$*, et l'équation de Mathieu associée :*
$g''(t)+\left(a-2q\,Cos(2t)-\dfrac{\Lambda(\Lambda-1)}{Sin^2(t)}\right)g(t)=0$

Donc en revenant à la notation commune, il vient :

$$\Lambda=\frac{1}{2}-\mu\quad\begin{cases}y(x)=\left(Sin^2(t)\right)^{\frac{2\Lambda-1}{4}}u_1(t)=\left(Sin^2(t)\right)^{-\frac{\mu}{2}}(t)\,u_1(t)\\ y(x)=\left(Sin^2(t)\right)^{-\frac{2\Lambda-1}{4}}u_2(t)=\left(Sin^2(t)\right)^{\frac{\mu}{2}}u_2(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}u_1''(t)+2\Lambda\,Cotan(t)\,u_1'(t)+\left(a-\Lambda^2-2q\,Cos(2t)\right)u_1(t)=0\\ u_2''(t)+2(1-\Lambda)\,Cotan(t)\,u_2'(t)+\left(a-(1-\Lambda)^2-2q\,Cos(2t)\right)u_2(t)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}g(t)=\left(Sin^2(t)\right)^{\frac{1-\Lambda}{2}}u_1(t)\Rightarrow y(x)=\left(Sin^2(t)\right)^{-\frac{1}{4}}g(t)=\left(Sin^2(t)\right)^{\frac{1-2\Lambda}{4}}u_1(t)=\left(Sin^2(t)\right)^{-\frac{\mu}{2}}u_1(t)\\ g(t)=\left(Sin^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}}u_2(t)\Rightarrow y(x)=\left(Sin^2(t)\right)^{-\frac{1}{4}}g(t)=\left(Sin^2(t)\right)^{-\frac{1-2\Lambda}{4}}u_2(t)=\left(Sin^2(t)\right)^{\frac{\mu}{2}}u_2(t)\end{cases}$$

Construction des solutions périodiques des équations intermédiaires des fonctions de Mathieu associées forme x=Cos(t)

Partons maintenant de ces deux équations proposées par E.L.Ince :

$$\begin{cases} u_1''(t) + 2\Lambda\ Cotan(t)\, u_1'(t) + \left(a - \Lambda^2 + 2q\ Cos(2t)\right) u_1(t) = 0 \\ u_2''(t) + 2(1-\Lambda)\ Cotan(t)\, u_2'(t) + \left(a - (1-\Lambda)^2 + 2q\ Cos(2t)\right) u_2(t) = 0 \end{cases}$$

Et recherchons la solution sous la forme de fonctions périodiques ou anti-périodiques de période π par des développements identiques en la forme à ceux employés pour les fonctions de Mathieu. Prenons par exemple une solution paire et anti-périodique en t de période π :

$$u_1(t) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^{\Lambda} Cos((2l+1)\,t)$$

Injectons cette forme dans l'équation différentielle :

$$Sin(t)\left(u_1''(t) + 2\Lambda\ Cotan(t)\, u_1'(t) + \left(a - \Lambda^2 + 2q\ Cos(2t)\right) u_1(t)\right) = 0$$

Donne sur le terme $A_{2l+1}^{\Lambda} Cos((2l+1)\,t)$ *l'expression suivante :*

$$A_{2l+1}^{\Lambda}\left(-q\ Sin(2(l-1)\,t) + \left(q + (1+2l-\Lambda)^2 - a\right) Sin(2l\ t) - \left(q + (1+2l+\Lambda)^2 - a\right) Sin(2(l+1)\,t) + q\ Sin(2(l+2)\,t)\right)$$

Qui doit s'annuler une fois les termes de l'expression répartis sur les termes voisins du développement (ils sont tous en fonction Sinus dans l'équation différentielle de départ). Cela conduit à la relation de récurrence suivante à 4 termes:

$$\begin{cases} l = 0 \rightarrow \left(a - (\Lambda+1)^2\right) A_1^{\Lambda} + \left(-a + q + (\Lambda-3)^2\right) A_3^{\Lambda} - q\ A_5^{\Lambda} = 0 \\ l = 1 \rightarrow q\ A_1^{\Lambda} + \left(a - (\Lambda+3)^2 - q\right) A_3^{\Lambda} + \left(-a + (\Lambda-5)^2 + q\right) A_5^{\Lambda} + q\ A_7^{\Lambda} = 0 \\ l = 2 \rightarrow q\ A_3^{\Lambda} + \left(a - (\Lambda+5)^2 - q\right) A_5^{\Lambda} + \left(-a + (\Lambda-7)^2 + q\right) A_7^{\Lambda} + q\ A_9^{\Lambda} = 0 \\ \ldots \\ q\ A_{2l-1}^{\Lambda} + \left(a - (2l+1+\Lambda)^2 - q\right) A_{2l+1}^{\Lambda} + \left(-a + (\Lambda-2l-3)^2 + q\right) A_{2l+3}^{\Lambda} - q\ A_{2l+5}^{\Lambda} = 0 \\ \ldots \end{cases}$$

Prenons un développement de la forme : $u_1(t) = ce_{2n}^{\Lambda}(t) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{\Lambda} Cos(2l\ t)$*, par le même procédé, on parvient à la relation de récurrence à 4 termes suivantes :*

$$\begin{cases} l = 0 \rightarrow \left(a - \Lambda^2 - q\right) A_0^{\Lambda} + \left(-a + q + (\Lambda-2)^2\right) A_2^{\Lambda} - q\ A_4^{\Lambda} = 0 \\ l = 1 \rightarrow q\ A_0^{\Lambda} + \left(a - (\Lambda+2)^2 - q\right) A_2^{\Lambda} + \left(-a + (\Lambda-4)^2 + q\right) A_4^{\Lambda} + q\ A_6^{\Lambda} = 0 \\ l = 2 \rightarrow q\ A_2^{\Lambda} + \left(a - (\Lambda+4)^2 - q\right) A_4^{\Lambda} + \left(-a + (\lambda-6)^2 + q\right) A_6^{\Lambda} + q\ A_8^{\Lambda} = 0 \\ \ldots \\ q\ A_{2l-2}^{\Lambda} + \left(a - (2l+\Lambda)^2 - q\right) A_{2l}^{\Lambda} + \left(-a + (\Lambda-2l-2)^2 + q\right) A_{2l+2}^{\Lambda} - q\ A_{2l+4}^{\Lambda} = 0 \\ \ldots \end{cases}$$

Ce sont les deux récurrences que présente E.L.Ince dans son article de 1922 « Associated Mathieu Functions ».

Cette article présente la récurrence sous une forme matricielle. Mais dans ce qui suit je vais délibérément choisir de modifier un peu cette présentation du système matriciel pour les raisons suivantes :

*- **d'abord il convient d'inverser le signe du paramètre q** afin d'être cohérent avec le standard d'écriture pour l'équation de Mathieu (au moins celui de NIST Handbook of Mathematical Functions, Mathieu Functions »*

- ensuite il est utile de faire apparaître plus clairement un problème de recherche de valeurs propres, et pour cela je vais changer de signe pour l'ensemble du système d'équations linéaires

Alors la forme matricielle de la récurrence avec un développement de cosinus impair :

$$\left(\begin{bmatrix} (1+\Lambda)^2 & q-(3-\Lambda)^2 & -q & 0 & \dots & 0 \\ q & -q+(3+\Lambda)^2 & q-(5-\Lambda)^2 & -q & \dots & \dots \\ 0 & q & -q+(5+\Lambda)^2 & q-(7-\Lambda)^2 & -q & \dots \\ \dots & 0 & q & \dots & q-(2l+1-\Lambda)^2 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & q & -q+(2l+1+\Lambda)^2 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_5 \\ \dots \\ A_{2l+1} \\ \dots \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{M} - a\,\mathbf{B}).\mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{M} - a\,\mathbf{I}).\mathbf{A} = 0 \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix} = [b_{i,j}] \quad \begin{cases} b_{i,j} = 0 & i > j \\ b_{i,j} = 1 \end{cases}$$

*On voit donc qu'il s'agit d'un problème de détermination des valeurs et de vecteurs propres de la matrice **B^{-1}M**. Les coefficients du développement sont les vecteurs propres calculées à partir des valeurs propres déterminées par diagonalisation.*

Et la forme matricielle de la récurrence avec un développement de cosinus pair devient :

$$\left(\begin{bmatrix} -q+\Lambda^2 & 2q-(2-\Lambda)^2 & -q & 0 & \dots & 0 \\ q & -q+(2+\Lambda)^2 & q-(4-\Lambda)^2 & -q & \dots & \dots \\ 0 & q & -q+(4+\Lambda)^2 & q-(6-\Lambda)^2 & -q & \dots \\ \dots & 0 & q & \dots & q-(2l-\Lambda)^2 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & q & -q+(2l+\Lambda)^2 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} A_0 \\ A_2 \\ A_4 \\ \dots \\ A_{2l} \\ \dots \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{M} - a\,\mathbf{B}).\mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{M} - a\,\mathbf{I}).\mathbf{A} = 0 \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix} = [b_{i,j}] \quad \begin{cases} b_{i,j} = 0 & i > j \\ b_{i,j} = 1 \end{cases}$$

*On voit donc qu'il s'agit également d'un problème de détermination des valeurs et de vecteurs propres de la matrice **B^{-1}M**. Les coefficients du développement sont les vecteurs propres calculées à partir des valeurs propres déterminées par diagonalisation.*

Dans l'article E.L.Ince introduit les notations des fonctions associées de Mathieu sous la forme, que je change légèrement suivant le changement d'argument (préfixe « c » pour x=Cos(t) ou « s » pour x=Sin(t), correspondance avec les fonctions de Mathieu ce et se lorsque Λ=0, i lorsqu'il s'agit d'une équation intermédiaire de Mathieu associée, et l'inversion du signe du paramètre q->-q déjà évoquée) :

$$g''(t)+\left(a-2q\,Cos(2t)-\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Sin^2(t)}\right)g(t)=0 \qquad \begin{cases} g(t)=cce_{2n}^{\Lambda}(t,q)=\left(Sin^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}}ccei_{2n}^{\Lambda}(t,q)=\left(Sin^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l}^{\Lambda}(q)\,Cos(2l\,t) \\ g(t)=cce_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)=\left(Sin^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}}ccei_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)=\left(Sin^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l+1}^{\Lambda}(q)\,Cos((2l+1)\,t) \\ g(t)=cse_{2n+2}^{\Lambda}(t,q)=\left(Sin^2(t)\right)^{\frac{1-\Lambda}{2}}ccei_{2n+1}^{1-\Lambda}(t,q)=\left(Sin^2(t)\right)^{\frac{1-\Lambda}{2}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l+1}^{1-\Lambda}(q)\,Cos((2l+1)\,t) \\ g(t)=cse_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)=\left(Sin^2(t)\right)^{\frac{1-\Lambda}{2}}ccei_{2n}^{1-\Lambda}(t,q)=\left(Sin^2(t)\right)^{\frac{1-\Lambda}{2}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l}^{1-\Lambda}(q)\,Cos(2l\,t) \end{cases}$$

Évidemment lorsque Λ=0, les développements sont effectivement d'une forme équivalente aux 4 types de solutions périodiques de l'équation de Mathieu :

$$\Lambda=0\Rightarrow g''(t)+(a-2q\,Cos(2t))\,g(t)=0\Rightarrow \begin{cases} cce_{2n}^{0}(t,q)=ccei_{2n}^{0}(t,q)=ce_{2n}(t,q)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l}^{0}(q)\,Cos(2l\,t) \\ cce_{2n+1}^{0}(t,q)=ccei_{2n+1}^{0}(t,q)=ce_{2n+1}(t,q)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l+1}^{0}(q)\,Cos((2l+1)\,t) \\ cse_{2n+2}^{0}(t,q)=Sin(t)\,ccei_{2n+1}^{1}(t,q)=se_{2n+2}(t,q)=Sin(t)\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l+1}^{1}(q)\,Cos((2l+1)\,t)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}B_{2l+2}(q)Sin((2l+2)\,t) \\ cse_{2n+1}^{0}(t,q)=Sin(t)\,ccei_{2n}^{1}(t,q)=se_{2n+1}(t,q)=Sin(t)\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l}^{1}(q)\,Cos((2l)\,t)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}B_{2l+1}(q)Sin((2l+1)\,t) \end{cases}$$

Construction des solutions périodiques des équations intermédiaires des fonctions de Mathieu associées forme x=Sin(t)

Parallèlement étudions l'autre forme de Liouville obtenue avec x=Sin(t), à savoir :

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y(x)}{dx^2}-2x\frac{dy(x)}{dx}+\left(\omega+\gamma^2\left(1-x^2\right)-\frac{\mu^2}{1-x^2}\right)y(x)=0 \qquad x=Sin(t)$$

$$\Lambda=\frac{1}{2}-\mu \qquad q=-\frac{\gamma^2}{4} \qquad a=\omega+\frac{1}{4}+\frac{\gamma^2}{2}$$

$$\begin{cases} y(x)=Cos^{-\mu}(t)w(t)\Rightarrow w''(t)-2\Lambda\,Tan(t)\,w'(t)+\left(a-\Lambda^2-2qCos(2t)\right)w(t)=0 \\ y(x)=Cos^{\mu}(t)w(t)\Rightarrow w''(t)-2(1-\Lambda)\,Tan(t)\,w'(t)+\left(a-(1-\Lambda)^2-2qCos(2t)\right)w(t)=0 \end{cases}$$

On note qu'il suffit de réaliser le changement d'argument t->π/2-t pour obtenir la même chose à partir des équations précédentes. On peut donc facilement trouver la récurrence d'une solution de la forme $u(t)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l+1}^{\Lambda}Sin((2l+1)\,t)$.

Partant du développement : $\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l+1}^{\Lambda}Cos\left((2l+1)\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}(-1)^l A_{2l+1}^{\Lambda}Sin((2l+1)\,t)$, *il suffit d'alterner les signes des coefficients de la matrice. Soit sous forme matricielle on obtient le système suivant :*

$$\left(\begin{bmatrix} (1+\Lambda)^2 & q+(3-\Lambda)^2 & q & 0 & \dots & 0 \\ q & q+(3+\Lambda)^2 & q+(5-\Lambda)^2 & q & \dots & \dots \\ 0 & q & q+(5+\Lambda)^2 & q+(7-\Lambda)^2 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & q & \dots & q+(2l+1-\Lambda)^2 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & q & q+(2l+1+\Lambda)^2 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}-a\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_5 \\ \dots \\ A_{2l+1} \\ \dots \end{bmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{M}-a\,\mathbf{B}).\mathbf{A}=0\Leftrightarrow (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{M}-a\,\mathbf{I}).\mathbf{A}=0 \qquad \mathbf{B}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix}=\left[b_{i,j}\right] \quad \begin{cases} b_{i,j}=0 & i>j \\ b_{i,j}=(-1)^{i-j} \end{cases}$$

Par une linéarisation trigonométrique, on arrive au même résultat.

De la même manière la récurrence d'une solution de la forme : $u(t)=\sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{\Lambda} Cos(2l\,t)$*, solution de l'équation :* $u''(t)-2\Lambda\,Tan(t)\,u'(t)+\left(a-\Lambda^2-2qCos(2t)\right)u(t)=0$*, est construite comme suit :*

$$\left(\begin{bmatrix} q+\Lambda^2 & 2q+(2-\Lambda)^2 & q & 0 & \cdots & 0 \\ q & q+(2+\Lambda)^2 & q+(4-\Lambda)^2 & q & \cdots & \cdots \\ 0 & q & q+(4+\Lambda)^2 & q+(6-\Lambda)^2 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & q & \cdots & q+(2l-\Lambda)^2 & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & q & q+(2l+\Lambda)^2 & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} - a\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ A_2 \\ A_4 \\ \cdots \\ A_{2l} \\ \cdots \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{M}-a\,\mathbf{B}).\mathbf{A}=0 \Leftrightarrow \left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{M}-a\,\mathbf{I}\right)\mathbf{A}=0 \qquad \mathbf{B}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots \end{bmatrix}=\left[b_{i,j}\right] \quad \begin{cases} b_{i,j}=0 & i>j \\ b_{i,j}=(-1)^{i-j} \end{cases}$$

Donc pour l'équation différentielle $g''(t)+\left(a-2q\,Cos(2t)-\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Cos^2(t)}\right)g(t)=0$*, on peut construire 4 types de solutions (notation préfixe « s » pour x=Sin(t), correspondance avec les fonctions de Mathieu ce et se lorsque Λ=0) :*

$$g''(t)+\left(a-2q\,Cos(2t)-\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Cos^2(t)}\right)g(t)=0 \Rightarrow \begin{cases} g(t)=sce_{2n}^{\Lambda}(t,q)=\left(Cos^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}} scei_{2n}^{\Lambda}(t,q)=\left(Cos^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}}\sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{\Lambda}(q)\,Cos(2l\,t) \\ g(t)=sse_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)=\left(Cos^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}} scei_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)=\left(Cos^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}}\sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^{\Lambda}(q)\,Sin((2l+1)\,t) \\ g(t)=sse_{2n+2}^{\Lambda}(t,q)=\left(Cos^2(t)\right)^{\frac{1-\Lambda}{2}} scei_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)=\left(Cos^2(t)\right)^{\frac{1-\Lambda}{2}}\sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^{1-\Lambda}(q)\,Sin((2l+1)\,t) \\ g(t)=sce_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)=\left(Cos^2(t)\right)^{\frac{1-\Lambda}{2}} scei_{2n}^{\Lambda}(t,q)=\left(Cos^2(t)\right)^{\frac{1-\Lambda}{2}}\sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{1-\Lambda}(q)\,Cos(2l\,t) \end{cases}$$

Là encore lorsque Λ=0, les développements sont effectivement d'une forme équivalente aux 4 types de solutions périodiques de l'équation de Mathieu :

$$\Lambda=0 \Rightarrow g''(t)+(a-2q\,Cos(2t))\,g(t)=0 \Rightarrow \begin{cases} sce_{2n}^{0}(t,q)=scei_{2n}^{0}(t,q)=ce_{2n}(t,q)=\sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{0}(q)Cos(2l\,t) \\ sse_{2n+1}^{0}(t,q)=ssei_{2n+1}^{0}(t,q)=se_{2n+1}(t,q)=\sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1}^{0}(q)Sin((2l+1)\,t) \\ sse_{2n+2}^{0}(t,q)=Cos(t)ssei_{2n+1}^{1}(t,q)=se_{2n+2}(t,q)=Cos(t)\sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^{1}(q)Sin((2l+1)\,t)=\sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+2}(q)Sin((2l+2)\,t) \\ sce_{2n+1}^{0}(t,q)=Cos(t)scei_{2n}^{1}(t,q)=ce_{2n+1}(t,q)=Cos(t)\sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{1}(q)Cos(2l\,t)=\sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1}(q)Cos((2l+1)\,t) \end{cases}$$

<u>Construction des solutions périodiques des équations des fonctions de Mathieu associées (forme x=Cos(t))</u>

Revenons maintenant à l'équation différentielle originale : $g''(t)+\left(a-2q\ Cos(2t)-\dfrac{\Lambda(\Lambda-1)}{Sin^2(t)}\right)g(t)=0$

Il est possible d'obtenir les récurrences des développements précédents :

$$t\in[0,\pi]\quad\begin{cases} cce_{2n}^{\Lambda}(t,q)=(Sin(t))^{\Lambda}\left(\dfrac{A_0^{\Lambda}(q)}{2}+\displaystyle\sum_{l=1}^{l=+\infty}A_{2l}^{\Lambda}(q)\,Cos(2l\ t)\right)\\ cce_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)=(Sin(t))^{\Lambda}\displaystyle\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l+1}^{\Lambda}(q)\,Cos((2l+1)\,t)\\ cse_{2n+2}^{\Lambda}(t,q)=(Sin(t))^{-\Lambda}\displaystyle\sum_{l=0}^{l=+\infty}B_{2l+2}^{\Lambda}(q)\,Sin((2l+2)\,t)\\ cse_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)=(Sin(t))^{-\Lambda}\displaystyle\sum_{l=0}^{l=+\infty}B_{2l+1}^{\Lambda}(q)\,Sin((2l+1)\,t)\end{cases}$$

En injectant la forme directement dans l'équation différentielle :

$$g''(t)+\left(a-2q\ Cos(2t)-\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Sin^2(t)}\right)g(t)=0$$

Et dans ce cas on obtient des récurrences à 5 termes.

<u>Pour le développement en cosinus pairs (forme x=Cos(t)) :</u>

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\Lambda^2-q-a\right)A_0+\frac{1}{2}\left(a+2q-(2-\Lambda)^2\right)A_2-\frac{1}{2}qA_4=0\\ \frac{1}{2}\left(a+2q-\Lambda^2\right)A_0+\left(4-\frac{3}{2}q+\Lambda^2-a\right)A_2+\frac{1}{2}\left(a+2q-(4-\Lambda)^2\right)A_4-\frac{1}{2}qA_6=0\\ -\frac{1}{2}qA_0+\frac{1}{2}\left(a+2q-(2+\Lambda)^2\right)A_2+\left(16+\Lambda^2-q-a\right)A_4+\frac{1}{2}\left(a+2q-(6-\Lambda)^2\right)A_6-\frac{1}{2}qA_8=0\\ \dots\\ -\frac{1}{2}qA_{2l-4}+\frac{1}{2}\left(a+2q-(2l-2+\Lambda)^2\right)A_{2l-2}+\left(4l^2+\Lambda^2-q-a\right)A_{2l}+\frac{1}{2}\left(a+2q-(2l+2-\Lambda)^2\right)A_{2l+2}-\frac{1}{2}qA_{2l+4}=0\end{cases}$$

$$\left(\begin{bmatrix}\frac{\Lambda^2-q}{2} & \frac{2q-(2-\Lambda)^2}{2} & -\frac{q}{2} & 0 & \dots & \dots & 0\\ \frac{2q-\Lambda^2}{2} & 4-\frac{3}{2}q+\Lambda^2 & \frac{2q-(4-\Lambda)^2}{2} & -\frac{q}{2} & 0 & \dots & 0\\ -\frac{q}{2} & \frac{2q-(2+\Lambda)^2}{2} & 16+\Lambda^2-q & \frac{2q-(6-\Lambda)^2}{2} & -\frac{q}{2} & 0 & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & -\frac{q}{2} & \frac{2q-(2l-2+\Lambda)^2}{2} & 4l^2+\Lambda^2-q & \frac{2q-(2l+2-\Lambda)^2}{2} & -\frac{q}{2} & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{bmatrix}-a\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & \dots & \dots\\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{bmatrix}\right).\begin{bmatrix}A_0\\ A_2\\ A_4\\ \dots\\ A_{2l}\\ A_{2l+2}\\ \dots\end{bmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow(\mathbf{M}-a\,\mathbf{H}).\mathbf{A}=0\Leftrightarrow\left(\mathbf{H}^{-1}\mathbf{M}-a\,\mathbf{I}\right).\mathbf{A}=0$$

Pour le développement en cosinus impairs (forme x=Cos(t)) :

$$\begin{cases}
\frac{1}{2}\left((1+\Lambda)^2-a\right)A_1+\frac{1}{2}\left(a+q-(3-\Lambda)^2\right)A_3-\frac{1}{2}qA_5=0 \\
\frac{1}{2}\left(a+q-(1+\Lambda)^2\right)A_1+\left(9-q+\Lambda^2-a\right)A_3+\frac{1}{2}\left(a+2q-(5-\Lambda)^2\right)A_5-\frac{1}{2}qA_7=0 \\
-\frac{1}{2}qA_1+\frac{1}{2}\left(a+2q-(3+\Lambda)^2\right)A_3+\left(25+\Lambda^2-q-a\right)A_5+\frac{1}{2}\left(a+2q-(7-\Lambda)^2\right)A_7-\frac{1}{2}qA_9=0 \\
\ldots \\
-\frac{1}{2}qA_{2l-3}+\frac{1}{2}\left(a+2q-(2l-1+\Lambda)^2\right)A_{2l-1}+\left((2l+1)^2+\Lambda^2-q-a\right)A_{2l+1}+\frac{1}{2}\left(a+2q-(2l+3-\Lambda)^2\right)A_{2l+3}-\frac{1}{2}qA_{2l+5}=0
\end{cases}$$

$$\left(\begin{bmatrix}
\frac{(1+\Lambda)^2}{2} & \frac{q-(3-\Lambda)^2}{2} & -\frac{q}{2} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\
\frac{q-(1+\Lambda)^2}{2} & 9-q+\Lambda^2 & \frac{2q-(5-\Lambda)^2}{2} & -\frac{q}{2} & 0 & \ldots & 0 \\
-\frac{q}{2} & \frac{2q-(3+\Lambda)^2}{2} & 25+\Lambda^2-q & \frac{2q-(7-\Lambda)^2}{2} & -\frac{q}{2} & 0 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & -\frac{q}{2} & \frac{2q-(2l-1+\Lambda)^2}{2} & (2l+1)^2+\Lambda^2-q & \frac{2q-(2l+3-\Lambda)^2}{2} & -\frac{q}{2} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{bmatrix}-a\begin{bmatrix}
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
-\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{bmatrix}\right).\begin{bmatrix}
A_1 \\ A_3 \\ A_5 \\ \ldots \\ A_{2l+1} \\ A_{2l+3} \\ \ldots
\end{bmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\mathbf{M}-a\,\mathbf{H}\right).\mathbf{A}=0 \Leftrightarrow \left(\mathbf{H}^{-1}\mathbf{M}-a\,\mathbf{I}\right).\mathbf{A}=0$$

Pour le développement en sinus pairs (forme x=Cos(t)) :

$$\begin{cases}
\left((2-\Lambda)^2-\frac{1}{2}q-a\right)B_2+\frac{1}{2}\left(a+2q-(4+\Lambda)^2\right)B_4-\frac{1}{2}qB_6=0 \\
\frac{1}{2}\left(a+q-(2-\Lambda)^2\right)B_2+\left(16-q+\Lambda^2-4\Lambda-a\right)B_4+\frac{1}{2}\left(a+2q-(6+\Lambda)^2\right)B_6-\frac{1}{2}qB_8=0 \\
-\frac{1}{2}qB_2+\frac{1}{2}\left(a+2q-(4-\Lambda)^2\right)B_4+\left(36+\Lambda^2-4\Lambda-q-a\right)B_6+\frac{1}{2}\left(a+2q-(8+\Lambda)^2\right)B_8-\frac{1}{2}qB_{10}=0 \\
\ldots \\
-\frac{1}{2}qB_{2l-2}+\frac{1}{2}\left(a+2q-(2l-\Lambda)^2\right)B_{2l}+\left((2l+2)^2-q+\Lambda^2-4\Lambda-a\right)B_{2l+2}+\frac{1}{2}\left(a+2q-(2l+4+\Lambda)^2\right)B_{2l+4}-\frac{1}{2}qB_{2l+6}=0
\end{cases}$$

$$\left(\begin{bmatrix}
\frac{2(2-\Lambda)^2-q}{2} & \frac{2q-(4+\Lambda)^2}{2} & -\frac{q}{2} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\
\frac{2q-(2-\Lambda)^2}{2} & 16-q+\Lambda^2-4\Lambda & \frac{2q-(6+\Lambda)^2}{2} & -\frac{q}{2} & 0 & \ldots & 0 \\
-\frac{q}{2} & \frac{2q-(4-\Lambda)^2}{2} & 36-q+\Lambda^2-4\Lambda & \frac{2q-(8+\Lambda)^2}{2} & -\frac{q}{2} & 0 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & -\frac{q}{2} & \frac{2q-(2l-\Lambda)^2}{2} & (2l+2)^2-q+\Lambda^2-4\Lambda & \frac{2q-(2l+4+\Lambda)^2}{2} & -\frac{q}{2} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{bmatrix}-a\begin{bmatrix}
1 & -\frac{1}{2} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
-\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{bmatrix}\right).\begin{bmatrix}
B_2 \\ B_4 \\ B_6 \\ \ldots \\ B_{2l+2} \\ B_{2l+4} \\ \ldots
\end{bmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\mathbf{M}-a\,\mathbf{H}\right).\mathbf{B}=0 \Leftrightarrow \left(\mathbf{H}^{-1}\mathbf{M}-a\,\mathbf{I}\right).\mathbf{B}=0$$

Pour le développement en sinus impairs (forme x=Cos(t)) :

$$\begin{cases}
\frac{1}{2}\left(3(1-\Lambda)^2-4q-3a\right)B_1+\frac{1}{2}\left(a+3q-(3+\Lambda)^2\right)B_3-\frac{1}{2}qB_5=0 \\
\frac{1}{2}\left(a+3q-(1-\Lambda)^2\right)B_1+\left(9-q+\Lambda^2-4\Lambda-a\right)B_3+\frac{1}{2}\left(a+2q-(5+\Lambda)^2\right)B_5-\frac{1}{2}qB_7=0 \\
-\frac{1}{2}qB_1+\frac{1}{2}\left(a+2q-(3-\Lambda)^2\right)B_3+\left(25-q+\Lambda^2-4\Lambda-a\right)B_5+\frac{1}{2}\left(a+2q-(7+\Lambda)^2\right)B_7-\frac{1}{2}qB_9=0 \\
\ldots \\
-\frac{1}{2}qB_{2l-3}+\frac{1}{2}\left(a+2q-(2l-1-\Lambda)^2\right)B_{2l-1}+\left((2l+1)^2-q+\Lambda^2-4\Lambda-a\right)B_{2l+1}+\frac{1}{2}\left(a+2q-(2l+3+\Lambda)^2\right)B_{2l+3}-\frac{1}{2}qB_{2l+5}=0
\end{cases}$$

$$\left(\begin{bmatrix}
\frac{3(1-\Lambda)^2-4q}{2} & \frac{3q-(3+\Lambda)^2}{2} & -\frac{q}{2} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\
\frac{3q-(1-\Lambda)^2}{2} & 9-q+\Lambda^2-4\Lambda & \frac{2q-(5+\Lambda)^2}{2} & -\frac{q}{2} & 0 & \ldots & 0 \\
-\frac{q}{2} & \frac{2q-(3-\Lambda)^2}{2} & 25-q+\Lambda^2-4\Lambda & \frac{2q-(7+\Lambda)^2}{2} & -\frac{q}{2} & 0 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & -\frac{q}{2} & \frac{2q-(2l-1-\Lambda)^2}{2} & (2l+1)^2-q+\Lambda^2-4\Lambda & \frac{2q-(2l+3+\Lambda)^2}{2} & -\frac{q}{2} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{bmatrix}-a\begin{bmatrix}
\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
-\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{bmatrix}\right).\begin{bmatrix} B_1 \\ B_3 \\ B_5 \\ \ldots \\ B_{2l+1} \\ B_{2l+3} \\ \ldots \end{bmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{M}-a\,\mathbf{H}).\mathbf{B}=0 \Leftrightarrow (\mathbf{H}^{-1}\mathbf{M}-a\,\mathbf{I}).\mathbf{B}=0$$

J'ai vérifié que les divers systèmes linéaires obtenus même quand ils sont finis, sont strictement équivalents à ceux obtenus avec les récurrences à 4 termes définies précédemment. De même que pour Λ=0, on retrouve strictement les récurrences à trois termes des 4 types de développement des fonctions de Mathieu classiques.

Quant aux solutions de l'équation originale de Mathieu associée $g''(t)+\left(a-2q\,Cos(2t)-\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Sin^2(t)}\right)g(t)=0$*, la correspondance avec les fonctions de Mathieu est également obtenue lorsque Λ=0, sous la forme matricielle qui est exactement celle des fonctions de Mathieu , notamment pour les ordres impairs :*

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{M}=\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & \ldots \\
\ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 \\
\ldots & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & \ldots
\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}
1 & q-9 & -q & 0 & \ldots & 0 \\
q & 9-q & q-25 & -q & \ldots & \ldots \\
0 & q & 25-q & q-49 & \ldots & \ldots \\
\ldots & 0 & q & \ldots & q-(2l+1)^2 & 0 \\
\ldots & \ldots & 0 & q & (2l+1)^2-q & \ldots \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}^{-1}\mathbf{M}=\begin{bmatrix}
1+q & q & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
q & 9 & q & 0 & \ldots & \ldots \\
0 & q & 27 & q & 0 & \ldots \\
\ldots & 0 & q & \ldots & q & 0 \\
\ldots & \ldots & 0 & q & (2l+1)^2 & \ldots \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}
1+q-a & q & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
q & 9-a & q & 0 & \ldots & \ldots \\
0 & q & 27-a & q & 0 & \ldots \\
\ldots & 0 & q & \ldots & q & 0 \\
\ldots & \ldots & 0 & q & (2l+1)^2-a & \ldots \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{bmatrix}.\begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_5 \\ \ldots \\ A_{2l+1} \\ \ldots \end{bmatrix}=0$$

Et pour les ordres pairs :

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&\dots&1\\0&1&1&1&\dots&1\\0&0&1&1&\dots&\dots\\\dots&0&0&\dots&\dots&1\\\dots&\dots&0&0&1&\dots\\0&0&\dots&\dots&0&\dots\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-q&2q-4&-q&0&\dots&0\\q&4-q&q-16&-q&\dots&\dots\\0&q&16-q&q-36&0&\dots\\\dots&0&q&\dots&q-4l^2&0\\\dots&\dots&0&q&4l^2-q&\dots\\0&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\mathbf{B}^{-1}\mathbf{M}=\begin{bmatrix}0&2q&0&0&\dots&0\\q&4&q&0&\dots&\dots\\0&q&16&q&0&\dots\\\dots&0&q&\dots&q&0\\\dots&\dots&0&q&(2l)^2&\dots\\0&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-a&2q&0&0&\dots&0\\q&4-a&q&0&\dots&\dots\\0&q&16-a&q&0&\dots\\\dots&0&q&\dots&q&0\\\dots&\dots&0&q&(2l)^2-a&\dots\\0&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}A_0\\A_2\\A_4\\\dots\\A_{2l}\\\dots\end{bmatrix}=0$$

<u>Développement direct des solutions périodiques de l'équation de Mathieu associée (forme x=Sin(t)), en fonctions sinusoïdales</u>

On peut également rechercher des solutions périodiques de l'équation différentielle de Mathieu associée $g''(t)+\left(a+2q\,Cos(2t)-\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Cos^2(t)}\right)g(t)=0$*, en injectant directement des développements en fonctions sinusoïdales. Plus précisément sous les diverses formes suivantes, cela conduit à des récurrence à 5 termes :*

<u>Développement en fonctions de Cosinus pairs (forme x=Sin(t))</u>

$$g(t)=\left(Cos^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l}Cos(2l\,t)$$

$$\begin{cases}\alpha_l A_{2l-4}+\left(\beta_l-\chi_l^{-1}a\right)A_{2l-2}+\left(\gamma_l-\chi_l^{0}a\right)A_{2l}+\left(\delta_l-\chi_l^{+1}a\right)A_{2l+2}+\varepsilon_l A_{2l+4}=0\\ \alpha_l=\varepsilon_l=-\frac{q}{2}\qquad \chi_l^{-1}=\chi_l^{+1}=\frac{1}{2}\qquad \chi_l^{0}=1\\ \beta_l=-\frac{1}{2}\left(2q-(2l-2+\Lambda)^2\right)\qquad \gamma_l=4l^2-q+\Lambda^2\qquad \delta_l=-\frac{1}{2}\left(a+2q-(2l+2-\Lambda)^2\right)\\ l=0\rightarrow\left(\gamma_0-\chi_0^{0}a\right)A_0+\left(\delta_0-\chi_0^{+1}a\right)A_2+\varepsilon_0A_4=0\qquad \gamma_0=\frac{1}{2}\left(\Lambda^2-q\right)\qquad \chi_0^{0}=\frac{1}{2}\\ l=1\rightarrow\left(\beta_1-\chi_1^{-1}a\right)A_0+\left(\gamma_1-\chi_1^{0}a\right)A_2+\left(\delta_1-\chi_1^{+1}a\right)A_4+\varepsilon_1A_6=0\qquad \gamma_1=4-\frac{3}{2}q+\Lambda^2\end{cases}$$

*En introduisant **M** une matrice penta-diagonale et **C** une matrice tri-diagonale, le système d'équations linéaires devient le suivant :*

$$\left(\begin{bmatrix} \gamma_0 & \delta_0 & \varepsilon_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 & \varepsilon_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} \chi_0^0 & \chi_0^{+1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \chi_1^{-1} & \chi_1^0 & \chi_1^0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \chi_2^{-1} & \chi_2^0 & \chi_2^{+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \chi_3^{-1} & \chi_3^0 & \chi_3^{+1} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} A_0 \\ A_2 \\ A_4 \\ A_6 \\ \dots \\ A_{2l} \\ \dots \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{M} - a\,\mathbf{C}).\mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow \left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{M} - a\,\mathbf{I}\right).\mathbf{A} = 0$$

*On voit donc qu'il s'agit d'un problème de détermination des valeurs et de vecteurs propres de la matrice **C**$^{-1}$**M**. Les coefficients du développement sont les vecteurs propres calculés à partir des valeurs propres déterminées par diagonalisation.*

<u>Développement en fonctions de Cosinus impairs (forme x=Sin(t))</u>

$$g(t) = \left(Cos^2(t)\right)^{-\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l} Cos((2l+1)\,t)$$

$$\begin{cases} \alpha_l A_{2l-3} + \left(\beta_l - \chi_l^{-1} a\right) A_{2l-1} + \left(\gamma_l - \chi_l^0 a\right) A_{2l+1} + \left(\delta_l - \chi_l^{+1} a\right)\ A_{2l+3} + \varepsilon_l A_{2l+5} = 0 \\ \alpha_l = \varepsilon_l = -\dfrac{q}{2} \qquad \chi_l^{-1} = \chi_l^{+1} = \dfrac{1}{2} \qquad \chi_l^0 = 1 \\ \beta_l = -\dfrac{1}{2}\left(2q - (2l-1-\Lambda)^2\right) \qquad \gamma_l = (2l+1)^2 - q + \Lambda^2 - 4\Lambda \qquad \delta_l = -\dfrac{1}{2}\left(2q - (2l+3+\Lambda)^2\right) \\ l = 0 \rightarrow \left(\gamma_0 - \chi_0^0 a\right) A_1 + \left(\delta_0 - \chi_0^{+1} a\right) A_3 + \varepsilon_0 A_5 = 0 \qquad \gamma_0 = \dfrac{1}{2}\left(3(\Lambda-1)^2 - 4q\right) \qquad \delta_0 = -\dfrac{1}{2}\left(3q - (3+\Lambda)^2\right) \qquad \chi_0^0 = \dfrac{3}{2} \\ l = 1 \rightarrow \left(\beta_1 - \chi_1^{-1} a\right) A_1 + \left(\gamma_1 - \chi_1^0 a\right) A_3 + \left(\delta_1 - \chi_1^{+1} a\right) A_5 + \varepsilon_1 A_7 = 0 \qquad \beta_1 = -\dfrac{1}{2}\left(3q - (\Lambda-1)^2\right) \end{cases}$$

*En introduisant **M** une matrice penta-diagonale et **B** une matrice tri-diagonale, le système d'équations linéaires devient le suivant :*

$$\left(\begin{bmatrix} \gamma_0 & \delta_0 & \varepsilon_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 & \varepsilon_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} \chi_0^0 & \chi_0^{+1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \chi_1^{-1} & \chi_1^0 & \chi_1^0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \chi_2^{-1} & \chi_2^0 & \chi_2^{+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \chi_3^{-1} & \chi_3^0 & \chi_3^{+1} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_5 \\ A_7 \\ \dots \\ A_{2l+1} \\ \dots \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{M} - a\,\mathbf{C}).\mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow \left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{M} - a\,\mathbf{I}\right).\mathbf{A} = 0$$

*On voit donc qu'il s'agit d'un problème de détermination des valeurs et de vecteurs propres de la matrice **C**$^{-1}$**M**. Les coefficients du développement sont les vecteurs propres calculés à partir des valeurs propres déterminées par diagonalisation.*

Développement en fonctions de sinus pairs (forme x=Sin(t))

$$g(t) = \left(Cos^2(t)\right)^{-\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+2} Sin((2l+2)\,t)$$

$$\begin{cases} \alpha_l B_{2l-2} + \left(\beta_l - \chi_l^{-1} a\right) B_{2l} + \left(\gamma_l - \chi_l^{0} a\right) B_{2l+2} + \left(\delta_l - \chi_l^{+1} a\right)\ B_{2l+4} + \varepsilon_l B_{2l+6} = 0 \\ \alpha_l = \varepsilon_l = -\dfrac{q}{2} \qquad \chi_l^{-1} = \chi_l^{+1} = \dfrac{1}{2} \qquad \chi_l^{0} = 1 \\ \beta_l = -\dfrac{1}{2}\left(2q - (2l - \Lambda)^2\right) \qquad \gamma_l = 4(l+1)^2 - q + \Lambda^2 - 4\Lambda \qquad \delta_l = -\dfrac{1}{2}\left(2q - (2l + 4 + \Lambda)^2\right) \\ l = 0 \rightarrow \left(\gamma_0 - \chi_0^{0} a\right) B_2 + \left(\delta_0 - \chi_0^{+1} a\right) B_4 + \varepsilon_0 B_6 = 0 \qquad \gamma_0 = (\Lambda - 2)^2 - \dfrac{q}{2} \end{cases}$$

*En introduisant **M** une matrice penta-diagonale et **C** une matrice tri-diagonale, le système d'équations linéaires devient le suivant :*

$$\left(\begin{bmatrix} \gamma_0 & \delta_0 & \varepsilon_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 & \varepsilon_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} \chi_0^0 & \chi_0^{+1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \chi_1^{-1} & \chi_1^0 & \chi_1^0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \chi_2^{-1} & \chi_2^0 & \chi_2^{+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \chi_3^{-1} & \chi_3^0 & \chi_3^{+1} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} B_2 \\ B_4 \\ B_6 \\ B_8 \\ \dots \\ B_{2l+2} \\ \dots \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{M} - a\,\mathbf{C})\mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{M} - a\,\mathbf{I}\right)\mathbf{B} = 0$$

*On voit donc qu'il s'agit d'un problème de détermination des valeurs et de vecteurs propres de la matrice **C**$^{-1}$**M**. Les coefficients du développement sont les vecteurs propres calculés à partir des valeurs propres déterminées par diagonalisation.*

Développement en fonctions de sinus impairs (forme x=Sin(t))

$$g(t) = \left(Cos^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1} Sin((2l+1)\,t)$$

$$\begin{cases} \alpha_l B_{2l-3} + \left(\beta_l - \chi_l^{-1} a\right) B_{2l-1} + \left(\gamma_l - \chi_l^{0} a\right) B_{2l+1} + \left(\delta_l - \chi_l^{+1} a\right)\ B_{2l+3} + \varepsilon_l B_{2l+5} = 0 \\ \alpha_l = \varepsilon_l = -\dfrac{q}{2} \qquad \chi_l^{-1} = \chi_l^{+1} = \dfrac{1}{2} \qquad \chi_l^{0} = 1 \\ \beta_l = -\dfrac{1}{2}\left(2q - (2l - 1 - \Lambda)^2\right) \qquad \gamma_l = (2l+1)^2 - q + \Lambda^2 \qquad \delta_l = -\dfrac{1}{2}\left(2q - (2l + 3 + \Lambda)^2\right) \\ l = 0 \rightarrow \left(\gamma_0 - \chi_0^{0} a\right) B_1 + \left(\delta_0 - \chi_0^{+1} a\right) B_3 + \varepsilon_0 B_5 = 0 \qquad \gamma_0 = \dfrac{1}{2}(1 + \Lambda)^2 \qquad \delta_0 = -\dfrac{1}{2}\left(q - (3 - \Lambda)^2\right) \qquad \chi_0^0 = \dfrac{1}{2} \\ l = 1 \rightarrow \left(\beta_1 - \chi_1^{-1} a\right) B_1 + \left(\gamma_1 - \chi_1^{0} a\right) B_3 + \left(\delta_1 - \chi_1^{+1} a\right) B_5 + \varepsilon_1 B_7 = 0 \qquad \beta_1 = -\dfrac{1}{2}\left(q - (1 + \Lambda)^2\right) \end{cases}$$

*En introduisant **M** une matrice penta-diagonale et **B** une matrice tri-diagonale, le système d'équations linéaires devient le suivant :*

$$\left(\begin{bmatrix} \gamma_0 & \delta_0 & \varepsilon_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 & \varepsilon_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} \chi_0^0 & \chi_0^{+1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \chi_1^{-1} & \chi_1^0 & \chi_1^0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \chi_2^{-1} & \chi_2^0 & \chi_2^{+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \chi_3^{-1} & \chi_3^0 & \chi_3^{+1} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} B_1 \\ B_3 \\ B_5 \\ B_7 \\ \dots \\ B_{2l+1} \\ \dots \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{M} - a\,\mathbf{C}).\mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{M} - a\,\mathbf{I}).\mathbf{B} = 0$$

On voit donc qu'il s'agit d'un problème de détermination des valeurs et de vecteurs propres de la matrice $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{M}$. Les coefficients du développement sont les vecteurs propres calculés à partir des valeurs propres déterminées par diagonalisation.

<u>Impossibilité de la construction des solutions périodiques des équations des fonctions intermédiaires de Mathieu associées forme x=Cos(t)</u>

Voyons si l'on peut directement construire pour l'équation différentielle intermédiaire :

$$u''(t) + 2\Lambda\, Cotan(t)\, u'(t) + \left(a - \Lambda^2 - 2q\, Cos(2t)\right) u(t) = 0$$

des développements périodiques possibles à la manière des fonctions de Mathieu, sous la forme $\sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1}^{\Lambda} Sin((2l+1)\,t)$ ou sous la forme $\sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l}^{\Lambda} Sin((2l)\,t)$. Pour t=0, ces deux développements s'annulent, ainsi bien évidemment que leurs dérivées secondes. Les dérivées premières sont a priori non nulles. Si nous injectons ce résultat dans l'équation différentielle alors :

$$u''(t) + 2\Lambda\, Cotan(t)\, u'(t) + \left(a - \Lambda^2 - 2q\, Cos(2t)\right) u(t)\Big|_{t=0} = 2\Lambda\, Cotan(t)\, u'(t)\Big|_{t=0} = 0$$

Comme Λ<>0 (sauf pour les fonctions de Mathieu) alors la solution ne peut qu'être identiquement nulle.

De même avec l'équation différentielle $u''(t) - 2\Lambda\, Tan(t)\, u'(t) + \left(a - \Lambda^2 - 2q\, Cos(2t)\right) u(t) = 0$ par simple changement d'argument, on en déduit qu'il n'est pas possible de construire des solutions de la forme $\sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^{\Lambda} Cos((2l+1)\,t)$ ou de la forme $\sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l}^{\Lambda} Sin((2l)\,t)$ excepté dans le cas des fonctions de Mathieu, soit lorsque Λ=0.

Résumé des principaux résultats pour la construction des fonctions de Mathieu associées périodiques, avec des récurrences à 4 termes :

$$g''(t)+\left(a-2q\,Cos(2t)-\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Sin^2(t)}\right)g(t)=0 \qquad \begin{cases} g(t)=cce_{2n}^{\Lambda}(t,q)=(Sin(t))^{\Lambda}\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l}^{\Lambda}(q)\,Cos(2l\,t) \\ g(t)=cce_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)=(Sin(t))^{\Lambda}\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l+1}^{\Lambda}(q)\,Cos((2l+1)\,t) \\ g(t)=cse_{2n+2}^{\Lambda}(t,q)=(Sin(t))^{-\Lambda}\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l+1}^{1-\Lambda}(q)\,Sin(t)Cos((2l+1)\,t) \\ g(t)=cse_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)=(Sin(t))^{-\Lambda}\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l}^{1-\Lambda}(q)\,Sin(t)Cos(2l\,t) \end{cases}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & ... & ... \\ ... & 0 & 0 & ... & ... & 1 \\ ... & ... & 0 & 0 & 1 & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & 0 & ... \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} (1+\Lambda)^2 & q-(3-\Lambda)^2 & -q & 0 & ... & 0 \\ q & -q+(3+\Lambda)^2 & q-(5-\Lambda)^2 & -q & ... & ... \\ 0 & q & -q+(5+\Lambda)^2 & q-(7-\Lambda)^2 & -q & ... \\ ... & 0 & q & ... & q-(2l+1-\Lambda)^2 & 0 \\ ... & ... & 0 & q & -q+(2l+1+\Lambda)^2 & ... \\ 0 & ... & ... & ... & ... & ... \end{bmatrix}-a\,\mathbf{I}\right).\begin{bmatrix} A_1^{\Lambda} \\ A_3^{\Lambda} \\ A_5^{\Lambda} \\ ... \\ A_{2l+1}^{\Lambda} \\ ... \end{bmatrix}=0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & ... & ... \\ ... & 0 & 0 & ... & ... & 1 \\ ... & ... & 0 & 0 & 1 & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & 0 & ... \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -q+\Lambda^2 & 2q-(2-\Lambda)^2 & -q & 0 & ... & 0 \\ q & -q+(2+\Lambda)^2 & q-(4-\Lambda)^2 & -q & ... & ... \\ 0 & q & -q+(4+\Lambda)^2 & q-(6-\Lambda)^2 & -q & ... \\ ... & 0 & q & ... & q-(2l-\Lambda)^2 & 0 \\ ... & ... & 0 & q & -q+(2l+\Lambda)^2 & ... \\ 0 & ... & ... & ... & ... & ... \end{bmatrix}-a\,\mathbf{I}\right).\begin{bmatrix} A_0^{\Lambda} \\ A_2^{\Lambda} \\ A_4^{\Lambda} \\ ... \\ A_{2l}^{\Lambda} \\ ... \end{bmatrix}=0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & ... & ... \\ ... & 0 & 0 & ... & ... & 1 \\ ... & ... & 0 & 0 & 1 & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & 0 & ... \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} (2-\Lambda)^2 & q-(2+\Lambda)^2 & -q & 0 & ... & 0 \\ q & -q+(4-\Lambda)^2 & q-(4+\Lambda)^2 & -q & ... & ... \\ 0 & q & -q+(6-\Lambda)^2 & q-(6+\Lambda)^2 & -q & ... \\ ... & 0 & q & ... & q-(2l+\Lambda)^2 & 0 \\ ... & ... & 0 & q & -q+(2l+2-\Lambda)^2 & ... \\ 0 & ... & ... & ... & ... & ... \end{bmatrix}-a\,\mathbf{I}\right).\begin{bmatrix} A_1^{1-\Lambda} \\ A_3^{1-\Lambda} \\ A_5^{1-\Lambda} \\ ... \\ A_{2l+1}^{1-\Lambda} \\ ... \end{bmatrix}=0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & ... & ... \\ ... & 0 & 0 & ... & ... & 1 \\ ... & ... & 0 & 0 & 1 & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & 0 & ... \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -q+(1-\Lambda)^2 & 2q-(1+\Lambda)^2 & -q & 0 & ... & 0 \\ q & -q+(3-\Lambda)^2 & q-(3+\Lambda)^2 & -q & ... & ... \\ 0 & q & -q+(5-\Lambda)^2 & q-(5+\Lambda)^2 & -q & ... \\ ... & 0 & q & ... & q-(2l-1+\Lambda)^2 & 0 \\ ... & ... & 0 & q & -q+(2l+1-\Lambda)^2 & ... \\ 0 & ... & ... & ... & ... & ... \end{bmatrix}-a\,\mathbf{I}\right).\begin{bmatrix} A_0^{1-\Lambda} \\ A_2^{1-\Lambda} \\ A_4^{1-\Lambda} \\ ... \\ A_{2l}^{1-\Lambda} \\ ... \end{bmatrix}=0$$

<u>Résumé des principaux résultats pour la construction des fonctions de Mathieu associées périodiques, avec des récurrences à 5 termes :</u>

$$t\in[0,\pi]\quad g''(t)+\left(a-2q\,Cos(2t)-\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Sin^2(t)}\right)g(t)=0\rightarrow\begin{cases}cce_{2n}^{\Lambda}(t,q)=(Sin(t))^{\Lambda}\left(\frac{A_0^{\Lambda}(q)}{2}+\sum_{l=1}^{l=+\infty}A_{2l}^{\Lambda}(q)\,Cos(2l\,t)\right)\\ cce_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)=(Sin(t))^{\Lambda}\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l+1}^{\Lambda}(q)\,Cos((2l+1)\,t)\\ cse_{2n+2}^{\Lambda}(t,q)=(Sin(t))^{-\Lambda}\sum_{l=0}^{l=+\infty}B_{2l+2}^{\Lambda}(q)\,Sin((2l+2)\,t)\\ cse_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)=(Sin(t))^{-\Lambda}\sum_{l=0}^{l=+\infty}B_{2l+1}^{\Lambda}(q)\,Sin((2l+1)\,t)\end{cases}$$

$$\left(\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&0&\cdots&\cdots&\cdots\\0&-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&0&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix}\frac{\Lambda^2-q}{2}&\frac{2q-(2-\Lambda)^2}{2}&-\frac{q}{2}&0&\cdots&\cdots&0\\\frac{2q-\Lambda^2}{2}&4-\frac{3}{2}q+\Lambda^2&\frac{2q-(4-\Lambda)^2}{2}&-\frac{q}{2}&0&\cdots&0\\-\frac{q}{2}&\frac{2q-(2+\Lambda)^2}{2}&16+\Lambda^2-q&\frac{2q-(6-\Lambda)^2}{2}&-\frac{q}{2}&0&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&-\frac{q}{2}&\frac{2q-(2l-2+\Lambda)^2}{2}&4l^2+\Lambda^2-q&\frac{2q-(2l+2-\Lambda)^2}{2}&-\frac{q}{2}&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{bmatrix}-a\,\mathbf{I}\right).\begin{bmatrix}A_0\\A_2\\A_4\\\cdots\\A_{2l}\\A_{2l+2}\\\cdots\end{bmatrix}=0$$

$$\left(\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&0&\cdots&\cdots&\cdots\\0&-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&0&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix}\frac{(1+\Lambda)^2}{2}&\frac{q-(3-\Lambda)^2}{2}&-\frac{q}{2}&0&\cdots&\cdots&0\\\frac{q-(1+\Lambda)^2}{2}&9-q+\Lambda^2&\frac{2q-(5-\Lambda)^2}{2}&-\frac{q}{2}&0&\cdots&0\\-\frac{q}{2}&\frac{2q-(3+\Lambda)^2}{2}&25+\Lambda^2-q&\frac{2q-(7-\Lambda)^2}{2}&-\frac{q}{2}&0&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&-\frac{q}{2}&\frac{2q-(2l-1+\Lambda)^2}{2}&(2l+1)^2+\Lambda^2-q&\frac{2q-(2l+3-\Lambda)^2}{2}&-\frac{q}{2}&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{bmatrix}-a\,\mathbf{I}\right).\begin{bmatrix}A_1\\A_3\\A_5\\\cdots\\A_{2l+1}\\A_{2l+3}\\\cdots\end{bmatrix}=0$$

$$\left(\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&0&\cdots&\cdots&\cdots\\0&-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&0&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix}\frac{2(2-\Lambda)^2-q}{2}&\frac{2q-(4+\Lambda)^2}{2}&-\frac{q}{2}&0&\cdots&\cdots&0\\\frac{2q-(2-\Lambda)^2}{2}&16-q+\Lambda^2-4\Lambda&\frac{2q-(6+\Lambda)^2}{2}&-\frac{q}{2}&0&\cdots&0\\-\frac{q}{2}&\frac{2q-(4-\Lambda)^2}{2}&36-q+\Lambda^2-4\Lambda&\frac{2q-(8+\Lambda)^2}{2}&-\frac{q}{2}&0&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&-\frac{q}{2}&\frac{2q-(2l-\Lambda)^2}{2}&(2l+2)^2-q+\Lambda^2-4\Lambda&\frac{2q-(2l+4+\Lambda)^2}{2}&-\frac{q}{2}&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{bmatrix}-a\,\mathbf{I}\right).\begin{bmatrix}B_2\\B_4\\B_6\\\cdots\\B_{2l+2}\\B_{2l+4}\\\cdots\end{bmatrix}=0$$

$$\left(\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&0&\cdots&\cdots&\cdots\\0&-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&0&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix}\frac{3(1-\Lambda)^2-4q}{2}&\frac{3q-(3+\Lambda)^2}{2}&-\frac{q}{2}&0&\cdots&\cdots&0\\\frac{3q-(1-\Lambda)^2}{2}&9-q+\Lambda^2-4\Lambda&\frac{2q-(5+\Lambda)^2}{2}&-\frac{q}{2}&0&\cdots&0\\-\frac{q}{2}&\frac{2q-(3-\Lambda)^2}{2}&25-q+\Lambda^2-4\Lambda&\frac{2q-(7+\Lambda)^2}{2}&-\frac{q}{2}&0&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&-\frac{q}{2}&\frac{2q-(2l-1-\Lambda)^2}{2}&(2l+1)^2-q+\Lambda^2-4\Lambda&\frac{2q-(2l+3+\Lambda)^2}{2}&-\frac{q}{2}&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{bmatrix}-a\,\mathbf{I}\right).\begin{bmatrix}B_1\\B_3\\B_5\\\cdots\\B_{2l+1}\\B_{2l+3}\\\cdots\end{bmatrix}=0$$

Cas limite q->0 pour un paramètre Λ entier

On sait que dans ce cas l'équation des ondes sphéroïdales se ramène à l'équation différentielle des fonctions de Legendre associées. La forme de Liouville permet d'appréhender les solutions lorsque μ demi-entier :

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y(x)}{dx^2}-2x\frac{dy(x)}{dx}+\left(\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{1-x^2}\right)y(x)=0 \qquad \Lambda=\frac{1}{2}-\mu \qquad x=Cos(t) \quad y(x)=P_\nu^\mu(x)=\left(1-x^2\right)^{-\frac{\mu}{2}}u(t)=\left(Sin^2(t)\right)^{-\frac{\mu}{2}}u(t)$$

$$\begin{cases} u''(t)+2\Lambda\,Cotan(t)\,u'(t)+\left(\dfrac{(2\nu+1)^2}{4}-\Lambda^2\right)u(t)=0 \\ u''(t)+(1-2\mu)\,Cotan(t)\,u'(t)+(\nu+\mu)(\nu-\mu+1)\,u(t)=0 \end{cases} \qquad \mu=\frac{2p+1}{2}\Rightarrow\Lambda=\frac{1}{2}-\mu=-p$$

On a donc à notre disposition toutes les solutions de cette équation, sous la forme de fonctions de Legendre associées d'ordre demi-entier et son développement sous une forme finie $u(t)=\sum_{l=0}^{l=p}A_l^p\,Cos\left(\left(\nu-\frac{2p+1}{2}+2l+1\right)t\right)$*. Dans notre cas le paramètre ν est également demi-entier, aussi des développements du type* $u(t)=\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}B_{2l+1}^\Lambda Cos\left(\left(2\tilde{l}+1\right)t\right)$ *ou* $u(t)=\sum_{\tilde{l}=-\infty}^{\tilde{l}=+\infty}B_{2l}^\Lambda Cos\left(2\tilde{l}\;t\right)$ *sont équivalents en posant* $\begin{cases} 2\tilde{l}+1=\nu-\dfrac{2p+1}{2}+2l+1=2l+\nu-p+\dfrac{1}{2} \\ \tilde{l}=l+\dfrac{\nu-p-\frac{1}{2}}{2} \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} 2\tilde{l}=\nu-\dfrac{2p+1}{2}+2l+1=2l+\nu-p+\dfrac{1}{2} \\ \tilde{l}=l+\dfrac{\nu-p+\frac{1}{2}}{2} \end{cases}$.

La récurrence des coefficients du développement impair $u(t)=\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}B_{2l+1}^\Lambda Cos\left(\left(2\tilde{l}+1\right)t\right)$ *donne :*

$$\begin{cases} \tilde{l}=0\rightarrow\left(\dfrac{(2\nu+1)^2}{4}-(1-p)^2\right)B_1^\Lambda=\left(\dfrac{(2\nu+1)^2}{4}-(3+p)^2\right)B_3^\Lambda \\ \tilde{l}=1\rightarrow\left(\dfrac{(2\nu+1)^2}{4}-(3-p)^2\right)B_3^\Lambda=\left(\dfrac{(2\nu+1)^2}{4}-(5+p)^2\right)B_5^\Lambda \\ \ldots \\ \left(\dfrac{(2\nu+1)^2}{4}-\left(2\tilde{l}+1-p\right)^2\right)B_{2l+1}^\Lambda=\left(\dfrac{(2\nu+1)^2}{4}-\left(2\tilde{l}+3+p\right)^2\right)B_{2l+3}^\Lambda\Leftrightarrow(p-l)(2\nu-2p+2l+1)\,B_{2l+1}^\Lambda=-(l+1)(2\nu+2l+3)\,B_{2l+3}^\Lambda \end{cases}$$

Et la récurrence pour un développement pair de la forme $u(t)=\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}B_{2l}^\Lambda Cos(2l\,t)$ *donne :*

$$\begin{cases} \tilde{l}=0\rightarrow\left(\dfrac{(2\nu+1)^2}{4}-p^2\right)B_0^\Lambda=\left(\dfrac{(2\nu+1)^2}{4}-(2+p)^2\right)B_2^\Lambda \\ \tilde{l}=1\rightarrow\left(\dfrac{(2\nu+1)^2}{4}-(2-p)^2\right)B_2^\Lambda=\left(\dfrac{(2\nu+1)^2}{4}-(4+p)^2\right)B_4^\Lambda \\ \ldots \\ \left(\dfrac{(2\nu+1)^2}{4}-\left(2\tilde{l}-p\right)^2\right)B_{2l}^\Lambda=\left(\dfrac{(2\nu+1)^2}{4}-\left(2\tilde{l}+2+p\right)^2\right)B_{2l+2}^\Lambda\Leftrightarrow 2(p-l)(2\nu-2p+2l+1)\,B_{2l}^\Lambda=-2(l+1)(2\nu+2l+3)\,B_{2l+2}^\Lambda \end{cases}$$

Ce sont donc les mêmes récurrences que pour les fonctions associées de Legendre d'ordre demi-entier.

D'un point de vue matriciel l'équation $u''(t)+2\Lambda\, Cotan(t)\,u'(t)+\left(a-\Lambda^2\right)u(t)=0 \qquad \Lambda=-p$ *correspond pour un développement impair « cosinusoïdal » à ce système linéaire :*

$$\left(\begin{bmatrix}1&1&1&1&\ldots&1\\0&1&1&1&\ldots&1\\0&0&1&1&\ldots&\ldots\\\ldots&0&0&\ldots&\ldots&1\\\ldots&\ldots&0&0&1&\ldots\\0&0&\ldots&\ldots&0&\ldots\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}(1-p)^2&-(3+p)^2&0&0&\ldots&0\\0&(3-p)^2&-(5+p)^2&0&\ldots&\ldots\\0&0&(5-p)^2&\ldots&0&\ldots\\\ldots&0&0&\ldots&-(2l+1+p)^2&0\\\ldots&\ldots&0&0&(2l+1-p)^2&\ldots\\0&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\end{bmatrix}-a\,\mathbf{I}\right).\begin{bmatrix}A_1\\A_3\\A_5\\\ldots\\A_{2l+1}\\\ldots\end{bmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}(1-p)^2-a&-12p&-20p&-28p&\ldots&\ldots\\0&(3-p)^2-a&-20p&-28p&\ldots&\ldots\\0&0&(5-p)^2-a&-28p&\ldots&\ldots\\\ldots&0&0&\ldots&\ldots&\ldots\\\ldots&\ldots&0&0&(2l+1-p)^2-a&\ldots\\0&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}A_1\\A_3\\A_5\\\ldots\\A_{2l+1}\\\ldots\end{bmatrix}=0$$

Les valeurs propres de ce système sont $a=(1-p)^2,(3-p)^2,(5-p)^2,\ldots$

Et pour un développement pair « cosinusoïdal » au système linéaire :

$$\left(\begin{bmatrix}1&1&1&1&\ldots&1\\0&1&1&1&\ldots&1\\0&0&1&1&\ldots&\ldots\\\ldots&0&0&\ldots&\ldots&1\\\ldots&\ldots&0&0&1&\ldots\\0&0&\ldots&\ldots&0&\ldots\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}p^2&-(2+p)^2&0&0&\ldots&0\\0&(2-p)^2&-(4+p)^2&0&\ldots&\ldots\\0&0&(4-p)^2&0&0&\ldots\\\ldots&0&0&\ldots&-(2l+p)^2&0\\\ldots&\ldots&0&0&(2l-p)^2&\ldots\\0&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\end{bmatrix}-a\,\mathbf{I}\right).\begin{bmatrix}A_0\\A_2\\A_4\\\ldots\\A_{2l}\\\ldots\end{bmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}p^2-a&-8p&-16p&-24p&\ldots&\ldots\\0&(2-p)^2-a&-16p&-24p&\ldots&\ldots\\0&0&(4-p)^2-a&-24p&\ldots&\ldots\\\ldots&0&0&\ldots&\ldots&\ldots\\\ldots&\ldots&0&0&(2l-p)^2-a&\ldots\\0&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}A_0\\A_2\\A_4\\\ldots\\A_{2l}\\\ldots\end{bmatrix}=0$$

Les valeurs propres de ce système sont $a=p^2,(2-p)^2,(4-p)^2\ldots$.

Plus généralement lorsque q=0, on peut revenir à une valeur réelle de Λ par la substitution Λ ↔ -p. Alors on a les systèmes matriciels suivants :

- pour un développement impair « cosinusoïdal » :

$$\begin{bmatrix} (1+\Lambda)^2-a & 12\Lambda & 20\Lambda & 28\Lambda & \dots & \dots \\ 0 & (3+\Lambda)^2-a & 20\Lambda & 28\Lambda & \dots & \dots \\ 0 & 0 & (5+\Lambda)^2-a & 28\Lambda & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & (2l+1+\Lambda)^2-a & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_5 \\ \dots \\ A_{2l+1} \\ \dots \end{bmatrix} = 0$$

$a=(1+\Lambda)^2,(3+\Lambda)^2,(5+\Lambda)^2,\dots \qquad u''(t)+2\Lambda\, Cotan(t)\, u'(t)+(2p+1)(2p+1+2\Lambda)\,u(t)=0$

Récurrence à deux termes $\qquad A_{2l+1}=\dfrac{(l-1-p)(l+p+\Lambda)}{(l+1+p)(l-p-\Lambda)}A_{2l-1}$

Et pour un développement pair « cosinusoïdal » :

$$\begin{bmatrix} \Lambda^2-a & 8\Lambda & 16\Lambda & 24\Lambda & \dots & \dots \\ 0 & (2+\Lambda)^2-a & 16\Lambda & 24\Lambda & \dots & \dots \\ 0 & 0 & (4+\Lambda)^2-a & 24\Lambda & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & (2l+\Lambda)^2-a & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_0 \\ A_2 \\ A_4 \\ \dots \\ A_{2l} \\ \dots \end{bmatrix} = 0$$

$a=\Lambda^2,(2+\Lambda)^2,(4+\Lambda)^2,(6+\Lambda)^2,\dots \qquad u''(t)+2\Lambda\, Cotan(t)\, u'(t)+2p(2p+2\Lambda)\,u(t)=0$

Récurrence à deux termes $\qquad A_{2l}=\dfrac{(l-1-p)(l+p+\Lambda-1)}{(l+p)(l-p-\Lambda)}A_{2l-2}$

Revenons aux solutions liées directement aux fonctions de Legendre d'ordre demi-entier. A chaque fois les premières valeurs propres p^2 *et* $(1-p)^2$ *correspondent à un développement à un seul terme, les deuxièmes valeurs propres* $(2-p)^2$ *et* $(3-p)^2$ *à deux termes, les troisièmes valeurs propres* $(4-p)^2$ *et* $(5-p)^2$ *à trois termes et ainsi de suite. Or on a vu dans la méthode de construction des fonctions de Legendre associées d'ordre et de degré demi-entier que quelque soit la valeur de p>0 :*

- pour v=-(2p+1)/2 et v=1-(2p+1)/2, le développement ne contient qu'un seul terme non nul . Pour v=-(2p+1)/2 c'est un développement en cosinus pair et pour v=1-(2p+1)/2 c'est un développement en cosinus impair

- pour v=2-(2p+1)/2 et v=3-(2p+1)/2, le développement contient deux termes non nuls. Pour v=2-(2p+1)/2 c'est un développement en cosinus pair et pour v=3-(2p+1)/2 c'est un développement en cosinus impair

- pour v=4-(2p+1)/2 et v=5-(2p+1)/2, le développement ne contient qu'un terme. Pour v=4-(2p+1)/2 c'est un développement en cosinus pair et pour v=5-(2p+1)/2 c'est un développement en cosinus impair

- et ainsi de suite

- pour p=0, le développement n'a qu'un terme.

Il est clair que cette séquence correspond à celle que nous trouvons ici. On peut donc en conclure l'identification des valeurs du degré v, suivant la succession des valeurs propres établies dans le cas des développements pair et impair selon la correspondance suivante :

$$\mu=\frac{2p+1}{2}\qquad\begin{cases} a=p^2\rightarrow \nu=-\dfrac{1}{2}-p & \nu=-\mu \Leftrightarrow \nu+\mu=0 \quad \textit{développement cosinus pair} \\ a=(1-p)^2\rightarrow \nu=\dfrac{1}{2}-p & \nu=1-\mu \Leftrightarrow \nu+\mu=1 \quad \textit{développement cosinus impair} \\ a=(2-p)^2\rightarrow \nu=\dfrac{3}{2}-p & \nu=2-\mu \Leftrightarrow \nu+\mu=2 \quad \textit{développement cosinus pair} \\ a=(3-p)^2\rightarrow \nu=\dfrac{5}{2}-p & \nu=3-\mu \Leftrightarrow \nu+\mu=3 \quad \textit{développement cosinus impair} \\ a=(4-p)^2\rightarrow \nu=\dfrac{7}{2}-p & \nu=4-\mu \Leftrightarrow \nu+\mu=4 \quad \textit{développement cosinus pair} \\ a=(5-p)^2\rightarrow \nu=\dfrac{9}{2}-p & \nu=5-\mu \Leftrightarrow \nu+\mu=5 \quad \textit{développement cosinus impair} \\ \ldots \end{cases}$$

Cette liste de valeur propre n'étant pas ordonnée de façon croissante, la correspondance en valeur croissante est la suivante :

$$\mu=\frac{2p+1}{2}\qquad\begin{cases} \textit{Valeur } n°1 \quad a=0\rightarrow \nu+\mu=p \quad \textit{développement cosinus parité} \quad p \\ \begin{cases}\textit{Valeur } n°2 \\ \textit{Valeur } n°3\end{cases} \quad a=1\rightarrow \begin{cases}\nu+\mu=p-1 \\ \nu+\mu=p+1\end{cases} \quad \textit{développement cosinus parité} \quad p-1 \\ \ldots \\ \begin{cases}\textit{Valeur } n°2p-2 \\ \textit{Valeur } n°2p-1\end{cases} \quad a=(1-p)^2\rightarrow \begin{cases}\nu+\mu=1 \\ \nu+\mu=2p-1\end{cases} \quad \textit{développement cosinus impair} \\ \begin{cases}\textit{Valeur } n°2p \\ \textit{Valeur } n°2p+1\end{cases} \quad a=p^2\rightarrow \begin{cases}\nu+\mu=0 \\ \nu+\mu=2p\end{cases} \quad \textit{développement cosinus pair} \\ \textit{Valeur } n°2p+2 \quad a=(p+1)^2\rightarrow \nu+\mu=2p+1 \quad \textit{développement cosinus impair} \\ \textit{Valeur } n°2p+3 \quad a=(p+2)^2\rightarrow \nu+\mu=2p+2 \quad \textit{développement cosinus pair} \\ \ldots \end{cases}$$

Orthogonalité des fonctions intermédiaires de Mathieu associées

Écrivons différemment l'équation intermédiaire de Mathieu associées :

$$u''(t)+2\Lambda\ Cotan(t)\,u'(t)+\left(a-\Lambda^2-2q\ Cos(2t)\right)u(t)=0$$
$$\Leftrightarrow Sin^{-2\Lambda}(t)\frac{d}{dt}\left\{Sin^{2\Lambda}(t)\frac{du(t)}{dt}\right\}+\left(a-\Lambda^2-2q\ Cos(2t)\right)u(t)=0$$

Les propriétés de périodicité des deux fonctions construites sont :

$$ccei_{2n}^{\Lambda}(t)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l}^{\Lambda}Cos(2l\ t)\Rightarrow\begin{cases}ccei_{2n}^{\Lambda}(t+\pi)=ccei_{2n}^{\Lambda}(t)\\ccei_{2n}^{\Lambda}(-t)=ccei_{2n}^{\Lambda}(t)\end{cases}\qquad ccei_{2n}^{\Lambda}{}'(0)=ccei_{2n}^{\Lambda}{}'\left(\frac{\pi}{2}\right)=ccei_{2n}^{\Lambda}{}'(\pi)=0$$
$$ccei_{2n+1}^{\Lambda}(t)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l+1}^{\Lambda}Cos((2l+1)\,t)\Rightarrow\begin{cases}ccei_{2n+1}^{\Lambda}(t+\pi)=-ccei_{2n+1}^{\Lambda}(t)\\ccei_{2n+1}^{\Lambda}(-t)=ccei_{2n+1}^{\Lambda}(t)\end{cases}\qquad ccei_{2n+1}^{\Lambda}{}'(0)=ccei_{2n}^{\Lambda}\left(\frac{\pi}{2}\right)=ccei_{2n}^{\Lambda}{}'(\pi)=0$$

Il suffit donc d'étudier la fonction sur l'intervalle [0,π] pour en déduire sa forme partout.

Soit deux solutions de valeurs caractéristique a différentes :

$$\begin{cases}Sin^{-2\Lambda}(t)\frac{d}{dt}\left\{Sin^{2\Lambda}(t)\frac{du_1(t)}{dt}\right\}+\left(a_1-\Lambda^2-2q\ Cos(2t)\right)u_1(t)=0\\Sin^{-2\Lambda}(t)\frac{d}{dt}\left\{Sin^{2\Lambda}(t)\frac{du_2(t)}{dt}\right\}+\left(a_2-\Lambda^2-2q\ Cos(2t)\right)u_2(t)=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow Sin^{-2\Lambda}(t)\left(u_2(t)\frac{d}{dt}\left\{Sin^{2\Lambda}(t)\frac{du_1(t)}{dt}\right\}-u_1(t)\frac{d}{dt}\left\{Sin^{2\Lambda}(t)\frac{du_2(t)}{dt}\right\}\right)+(a_1-a_2)\,u_1(t)u_2(t)=0$$
$$\Rightarrow Sin^{-2\Lambda}(t)\frac{d}{dt}\left\{Sin^{2\Lambda}(t)\left\{u_2(t)\frac{du_1(t)}{dt}-u_1(t)\frac{du_2(t)}{dt}\right\}\right\}+(a_1-a_2)\,u_1(t)u_2(t)=0$$

En intégrant sur l'intervalle [0,π] il vient :

$$\left[Sin^{2\Lambda}(t)\left\{u_2(t)\frac{du_1(t)}{dt}-u_1(t)\frac{du_2(t)}{dt}\right\}\right]_0^{\pi}+(a_1-a_2)\int_0^{\pi}dt\ \ Sin^{2\Lambda}(t)\,u_1(t)u_2(t)=0$$

Lorsque Λ>0 alors il vient toujours $a_1\neq a_2\Rightarrow\int_0^{\pi}dt\ \ Sin^{2\Lambda}(t)\,u_1(t)u_2(t)=0$. *Lorsque Λ=0 alors*

c'est le cas des fonctions de Mathieu et nous avons l'orthogonalité complète sur les fonctions de Mathieu de même parité sur [0,π] et de parité quelconque sur [0,2π] :

$$a_{2n}\neq a_{2m}\Rightarrow\int_0^{\pi}dt\ u_{2n}(t)u_{2m}(t)=0$$
$$a_{2n+1}\neq a_{2m+1}\Rightarrow\int_0^{\pi}dt\ u_{2n+1}(t)u_{2m+1}(t)=0$$
$$a_n\neq a_n\Rightarrow\int_0^{2\pi}dt\ u_n(t)u_m(t)=0$$

Supposons Λ>0, il vient pour les fonctions de Mathieu associées la relation d'orthogonalité suivante : $a_n\neq a_m\Rightarrow\int_0^{\pi}dt\ \ cce_n^{\Lambda}(t)\,cce_m^{\Lambda}(t)=0$.

<u>Pour la normalisation des deux types de fonctions de Mathieu associées</u>,

Partant de la relation précédente d'orthogonalité des fonctions de Mathieu associées sur [0,2π] :

$$a_n \neq a_m \Rightarrow \int_0^{2\pi} dt\ \ cce_n^{\Lambda}(t)\, cce_m^{\Lambda}(t) = 0$$

On aurait pu calculer la norme sur [0,2π] à partir de l'expression : $\int_0^{2\pi} dt\,\left(cce_n^{\Lambda}(t)\right)^2 = 2\int_0^{\pi} dt\,\left(cce_n^{\Lambda}(t)\right)^2$ *, mais cette dernière conduit à des intégrales malaisées à calculer :*

$$\begin{cases} \int_0^{\pi} dt\ Sin^{\Lambda}(t)\left(\sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{\Lambda}(q) Cos(2l\,t)\right)^2 \\ \int_0^{\pi} dt\ Sin^{\Lambda}(t)\left(\sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{\Lambda}(q) Cos((2l+1)\,t)\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \int_0^{\pi} dt\ Sin^{\Lambda}(t) Cos(2l\,t) Cos(2m\,t)$$

On peut donc s'affranchir de la relation d'orthogonalité des fonctions et par exemple étendre la règle de normalisation des fonctions de Mathieu (pour Λ=0), à savoir que la norme sur [0,2π] du seul développement de Fourier est normalisé à π :

$$g''(t) + \left(a - 2q\ Cos(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Sin^2(t)}\right) g(t) = 0 \qquad \begin{cases} \int_0^{2\pi} dt\left(\sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{\Lambda}(q) Cos(2l\,t)\right)^2 = \pi \Rightarrow 2\left(A_0^{\Lambda}(q)\right)^2 + \sum_{l=0}^{l=+\infty}\left(A_{2l}^{\lambda}(q)\right)^2 = 1 \\ \int_0^{2\pi} dt\left(\sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{\Lambda}(q) Cos((2l+1)\,t)\right)^2 = \pi \Rightarrow \sum_{l=0}^{l=+\infty}\left(A_{2l+1}^{\Lambda}(q)\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} dt\,\left(Sin^2(t)\right)^{-\Lambda}\left(cce_{2n}^{\Lambda}(t,q)\right)^2 = \int_0^{2\pi} dt\,\left(Sin^2(t)\right)^{-\Lambda}\left(cce_{2n+1}^{\lambda}(t,q)\right)^2 = \int_0^{2\pi} dt\,\left(Sin^2(t)\right)^{\Lambda-1}\left(cse_{2n+2}^{\Lambda}(t,q)\right)^2 = \int_0^{2\pi} dt\,\left(Sin^2(t)\right)^{\Lambda-1}\left(cse_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)\right)^2 = \pi$$

Et de même :

$$g''(t) + \left(a - 2q\ Cos(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Cos^2(t)}\right) g(t) = 0 \qquad \begin{cases} \int_0^{2\pi} dt\left(\sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{\Lambda}(q) Cos(2l\,t)\right)^2 = \pi \Rightarrow 2\left(A_0^{\Lambda}(q)\right)^2 + \sum_{l=0}^{l=+\infty}\left(A_{2l}^{\Lambda}(q)\right)^2 = 1 \\ \int_0^{2\pi} dt\left(\sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{\Lambda}(q) Sin((2l+1)\,t)\right)^2 = \pi \Rightarrow \sum_{l=0}^{l=+\infty}\left(A_{2l+1}^{\Lambda}(q)\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} dt\,\left(Cos^2(t)\right)^{-\Lambda}\left(sce_{2n}^{\Lambda}(t,q)\right)^2 = \int_0^{2\pi} dt\,\left(Cos^2(t)\right)^{-\Lambda}\left(sse_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)\right)^2 = \int_0^{2\pi} dt\,\left(Cos^2(t)\right)^{\Lambda-1}\left(sse_{2n+2}^{\Lambda}(t,q)\right)^2 = \int_0^{2\pi} dt\,\left(Cos^2(t)\right)^{\Lambda-1}\left(sce_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)\right)^2 = \pi$$

Expression des dérivées premières des fonctions intermédiaires de Mathieu associées

J'appelle les deux fonctions périodiques intermédiaires de Mathieu associées, les seuls développement en cosinus :

$$u''(t)+2\Lambda\ Cotan(t)\,u'(t)+\left(a-\Lambda^2-2q\ Cos(2t)\right)u(t)=0$$

$$\begin{cases} u(t)=ccei_{2n}^{\Lambda}(t,q)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l}^{\Lambda}(q)\,Cos(2l\ t) \\ u(t)=ccei_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l+1}^{\Lambda}(q)\,Cos((2l+1)\,t) \end{cases}$$

Les dérivées premières et secondes sont alors triviales :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left\{ccei_{2n}^{\Lambda}(t,q)\right\}=-\sum_{l=0}^{l=+\infty}2l\ A_{2l}^{\Lambda}(q)\,Sin(2l\ t) \\ \frac{d^2}{dt^2}\left\{ccei_{2n}^{\Lambda}(t,q)\right\}=-\sum_{l=0}^{l=+\infty}4l^2\ A_{2l}^{\Lambda}(q)\,Cos(2l\ t) \\ \frac{d}{dt}\left\{ccei_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)\right\}=-\sum_{l=0}^{l=+\infty}(2l+1)\ A_{2l+1}^{\Lambda}(q)\,Sin((2l+1)\,t) \\ \frac{d^2}{dt^2}\left\{ccei_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)\right\}=-\sum_{l=0}^{l=+\infty}(2l+1)^2\ A_{2l+1}^{\Lambda}(q)\,Cos((2l+1)\,t) \end{cases}$$

Développement des solutions périodiques de l'équation intermédiaire de Mathieu associée lorsque q proche de 0 pour un paramètre Λ quelconque

L'approche que j'utilise pour établir les premiers termes d'un développement en puissance du paramètre q pour l'équation intermédiaire de Mathieu associée des valeurs caractéristiques a est purement algébrique, mais ne visent pas à établir une formule générique :

$$u''(t)+2\Lambda\ Cotan(t)\,u'(t)+\left(a-\Lambda^2-2q\ Cos(2t)\right)u(t)=0$$

C'est une approche tout à fait similaire et pragmatique à celle de McLachlan dans son ouvrage complet sur les fonctions de Mathieu.

Prenons un développement pair et sa valeur caractéristique sous la forme suivante :

$$\begin{cases} a=a_{2n}^{\Lambda}(q) \\ ccei_{2n}^{\Lambda}(t,q)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l}^{\Lambda}(q)\,Cos(2l\ t) \end{cases}$$

Supposons maintenant que la valeur caractéristique et les coefficients se développent en série de puissance de q, connaissant par ailleurs la valeur caractéristique lorsque q =0 (liée à celle des fonctions de Legendre associées d'ordre demi-entier) :

$$\begin{cases} a_{2n}^{\Lambda}(q)=(2n+\Lambda)^2+q\ a_{2n}^{\Lambda,1}+q^2\ a_{2n}^{\Lambda,2}+q^3\ a_{2n}^{\Lambda,3}+\dots \\ A_{2l}^{\Lambda}(q)=A_{2l}^{\Lambda,0}+qA_{2l}^{\Lambda,1}+q^2\ A_{2l}^{\Lambda,2}+q^3\ A_{2l}^{\Lambda,3}+\dots \end{cases}$$

En injectant ces formes directement dans l'équation :

$$Sin(t)\,u''(t)+2\Lambda\;Cos(t)\,u'(t)+Sin(t)\left(a-\Lambda^2-2q\;Cos(2t)\right)u(t)=0$$

Et par linéarisation trigonométrique, il suffit de résoudre un système d'équations algébriques :
- d'annulation de chacune des composantes de puissance de q
- dans la composante de puissance d'annuler le terme trigonométrique linéarisé

Il se trouve que le système d'équations algébriques est finalement linéaire en supposant un certain nombre de coefficients de départ comme des paramètres de départ et non comme variables à résoudre. Voici le code Mathematica permettant d'obtenir la solution pour le développement pair :

```
Clear[q, a, AA, w, Ordre, l, j,λ,Λ, LaListeOrdreQ, ListSin, ListeSolve, ListeVariables];
ListeSolve={};
ListeVariables={};
Ordre=8;
w[t_] := Sum[AA[2 l] Cos[2 l t], {l, 0, Ordre}];
a=λ[0]+   Sum[AppendTo[ListeVariables, λ[l]]; λ[l] q^l, {l, 1, Ordre}];
λ[0]=(Λ)^2;
Do[
   AA[2 l]= Expand[ Sum[AppendTo[ListeVariables, A[2 l, j]];  A[2 l, j] q^j, {j, 0, Ordre}]]
   , {l, 1, Ordre}
  ];
Expr=TrigReduce[TrigExpand[Factor[Expand[ Sin[t] (w^\[Prime]\[Prime])[t]+2 Λ Cos[t] Derivative[1][w][t]+Sin[t] (a-Λ^2-2 q Cos[2 t]) w[t]]]]];
LaListeOrdreQ=Take[CoefficientList[Expr, q], Ordre+1];
Do[
  CArrays=
   Normal[CoefficientArrays[LaListeOrdreQ[[l+1]], Table[Sin[(2 l+1) t], {l, 0, Ordre}]]];
  If[Dimensions[CArrays] == {2},
      ListSin=CArrays[[2]];
      Scan[If[Not[# === 0], AppendTo[ListeSolve, # == 0]] &, ListSin]
   ]
  , {l, 0, Ordre}];
ListeSolve=Simplify[ListeSolve];
leSolve=Solve[ListeSolve, ListeVariables];
Print[Take[leSolve[[1]], Ordre]];
Print[Take[leSolve[[1]], Ordre] /. Λ -> 0];
```

Il suffit d'appliquer ce code pour les valeurs successives λ[0]=(Λ)^2 , λ[0]=(2+Λ)^2, λ[0]=(4+Λ)^2,... pour obtenir à l'ordre 2, 3 ou 4 (suivant la complexité des expressions ordres supérieurs non reproduite ici), les valeurs caractéristiques suivantes :

$$n=0 \to a_0^{\Lambda}(q)=\Lambda^2-\frac{2\Lambda}{1+\Lambda}q-\frac{1+2\Lambda}{(1+\Lambda)^3(2+\Lambda)}q^2+\frac{2\Lambda(1+2\Lambda)}{(1+\Lambda)^5(2+\Lambda)(3+\Lambda)}q^3-$$

$$-\frac{(1+2\Lambda)(-21-61\Lambda+46\Lambda^2+76\Lambda^3+20\Lambda^4)}{4(1+\Lambda)^7(2+\Lambda)^3(3+\Lambda)(4+\Lambda)}q^4+\ldots$$

$$n=1 \to a_2^{\Lambda}(q)=(2+\Lambda)^2-\frac{2\Lambda(\Lambda-1)}{3+4\Lambda+\Lambda^2}q+\frac{45+111\Lambda+33\Lambda^2-19\Lambda^3-10\Lambda^4}{(1+\Lambda)^3(3+\Lambda)^3(4+\Lambda)}q^2+$$

$$+\frac{2\Lambda(-819-2697\Lambda-2676\Lambda^2-1242\Lambda^3-259\Lambda^4+3\Lambda^5+10\Lambda^6)}{(1+\Lambda)^5(3+\Lambda)^5(4+\Lambda)(5+\Lambda)}q^3+\ldots$$

$$n=2 \to a_4^{\Lambda}(q)=(4+\Lambda)^2-\frac{2\Lambda(\Lambda-1)}{(3+\Lambda)(5+\Lambda)}q-\frac{3(-450-1005\Lambda-575\Lambda^2-29\Lambda^3+37\Lambda^4+6\Lambda^5)}{(2+\Lambda)(3+\Lambda)^3(5+\Lambda)^3(6+\Lambda)}q^2+$$

$$+\frac{6\Lambda(\Lambda-1)(-37350-55065\Lambda-29050\Lambda^2-6950\Lambda^3-638\Lambda^4+23\Lambda^5+6\Lambda^6)}{(2+\Lambda)(3+\Lambda)^5(5+\Lambda)^5(6+\Lambda)(7+\Lambda)}q^3+\ldots$$

$$n=3 \to a_6^{\Lambda}(q)=(6+\Lambda)^2-\frac{2\Lambda(\Lambda-1)}{(5+\Lambda)(7+\Lambda)}q+\frac{19600+24465\Lambda+8015\Lambda^2+53\Lambda^3-267\Lambda^4-26\Lambda^5}{(4+\Lambda)(5+\Lambda)^3(7+\Lambda)^3(8+\Lambda)}q^2$$

$$+\frac{2\Lambda(\Lambda-1)(-3586800-5310095\Lambda-3012625\Lambda^2-828940\Lambda^3-112554\Lambda^4-5567\Lambda^5+235\Lambda^6+26\Lambda^7)}{(3+\Lambda)(4+\Lambda)(5+\Lambda)^5(7+\Lambda)^7(8+\Lambda)(9+\Lambda)}q^3+\ldots$$

$$\ldots$$

Remarque : si l'on suppose avec Mathematica une valeur propre de la forme a=(2n+Λ)^2, il se trouve que les variables de départ $A_{2l}^{\Lambda,0} \quad l\in[0,\ldots,n]$ *pour le système d'équations algébriques sont elles-mêmes en nombre variable, dès lors je n'arrive pas à obtenir un système d'équation intrinsèquement cohérent pour être soluble tout du moins dans Mathematica.*

Voici le code Mathematica permettant d'obtenir la solution pour le développement impair, en supposant également les développements en puissance de q :

$$u''(t) + 2\Lambda\, Cotan(t)\, u'(t) + \left(a - \Lambda^2 + 2q\, Cos(2t)\right) u(t) = 0$$

$$\begin{cases} a = a_{2n+1}^{\Lambda}(q) \\ ccei_{2n+1}^{\Lambda}(t,q) = \displaystyle\sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^{\Lambda}(q)\, Cos((2l+1)\,t) \\ a_{2n+1}^{\Lambda}(q) = (2n+1+\Lambda)^2 + q\ a_{2n+1}^{\Lambda,1} + q^2\ a_{2n+1}^{\Lambda,2} + q^3\ a_{2n+1}^{\Lambda,3} + \ldots \\ A_{2l+1}^{\Lambda}(q) = A_{2l+1}^{\Lambda,0} + qA_{2l+1}^{\Lambda,1} + q^2\ A_{2l+1}^{\Lambda,2} + q^3\ A_{2l+1}^{\Lambda,3} + \ldots \end{cases}$$

```
Clear[q, a, AA, w, Ordre, l, j,λ, Λ, LaListeOrdreQ, ListSin, ListeSolve, ListeVariables];
ListeSolve={};
ListeVariables={};
Ordre=5;
w[t_] := Sum[AA[2 l+1] Cos[(2 l+1) t], {l, 0, Ordre}];
a =λ[0]+   Sum[AppendTo[ListeVariables,λ[l]];λ[l] q^l, {l, 1, Ordre}];
λ[0]=(1+Λ)^2;
Do[
   AA[2 l+1]=Expand[ Sum[AppendTo[ListeVariables, A[2 l+1, j]]; A[2 l+1, j] q^j, {j, 0, Ordre}]]
  , {l, 1, Ordre}
 ];
Expr=TrigReduce[TrigExpand[Factor[Expand[Sin[t] (w^\[Prime]\[Prime])[t]+2 Λ Cos[t] Derivative[1][w][t]+Sin[t] (a-Λ^2-2 q Cos[2 t]) w[t]]]]];
LaListeOrdreQ=Take[CoefficientList[Expr, q], Ordre+1];
Do[
  CArrays=Normal[CoefficientArrays[LaListeOrdreQ[[l+1]], Table[Sin[(2 l+2) t], {l, 0, Ordre}]]];
  If[Dimensions[CArrays] == {2},
      ListSin=CArrays[[2]];
      Scan[If[Not[# === 0], AppendTo[ListeSolve, # == 0]] &, ListSin]
  ]
 , {l, 0, Ordre}];
ListeSolve=Simplify[ListeSolve];
leSolve=Solve[ListeSolve, ListeVariables];
Print[Take[leSolve[[1]], Ordre]];
Print[Take[leSolve[[1]], Ordre] /. Λ -> 0];
```

Il suffit d'appliquer ce code pour les valeurs successives λ[0]=(1+Λ)^2,λ[0]=(3+Λ)^2, λ[0]=(5+Λ)^2,... pour obtenir à l'ordre 2, 3 ou 4 (suivant la complexité des expressions ordres supérieurs non reproduite ici), les valeurs caractéristiques suivantes :

$$n = 0 \rightarrow a_1^{\Lambda}(q) = (1+\Lambda)^2 - \frac{2(\Lambda-1)}{2+\Lambda}\, q - \frac{3\,(1+2\Lambda)}{(3+\Lambda)(2+\Lambda)^3}\, q^2 + \frac{6(\Lambda-1)(1+2\Lambda)}{(2+\Lambda)(3+\Lambda)(4+\Lambda)^5}\, q^3 -$$
$$- \frac{15\,(1+2\,\Lambda)\left(12 - 121\Lambda - 42\Lambda^2 + 12\Lambda^3 + 4\Lambda^4\right)}{4\,(2+\Lambda)^7 (3+\Lambda)^3 (4+\Lambda)(5+\Lambda)}\, q^4 + \ldots$$

$$n = 1 \rightarrow a_3^{\Lambda}(q) = (3+\Lambda)^2 - \frac{2\Lambda(\Lambda-1)}{(2+\Lambda)(4+\Lambda)}\, q - \frac{-160 - 464\Lambda - 108\Lambda^2 + 43\Lambda^3 + 14\Lambda^4}{(2+\Lambda)^3 (4+\Lambda)^3 (5+\Lambda)}\, q^2 +$$
$$+ \frac{2(\Lambda-1)\left(-7680 - 22976\Lambda - 18272\Lambda^2 - 6272\Lambda^3 - 862\Lambda^4 + 23\Lambda^5 + 14\Lambda^6\right)}{(2+\Lambda)^5 (4+\Lambda)^5 (5+\Lambda)(6+\Lambda)}\, q^3 + \ldots$$

$$n = 2 \rightarrow a_5^{\Lambda}(q) = (5+\Lambda)^2 - \frac{2\Lambda(\Lambda-1)}{(4+\Lambda)(6+\Lambda)}\, q - \frac{-6048 - 9648\Lambda - 4020\Lambda^2 - 87\Lambda^3 + 181\Lambda^4 + 22\Lambda^5}{(3+\Lambda)(4+\Lambda)^3 (6+\Lambda)^3 (7+\Lambda)}\, q^2 +$$
$$+ \frac{2\Lambda(\Lambda-1)\left(-387072 - 519840\Lambda - 237408\Lambda^2 - 47808\Lambda^3 - 3603\Lambda^4 + 109\Lambda^5 + 22\Lambda^6\right)}{(3+\Lambda)(4+\Lambda)^5 (6+\Lambda)^5 (7+\Lambda)(8+\Lambda)}\, q^3 + \ldots$$

$$n = 3 \rightarrow a_7^{\Lambda}(q) = (7+\Lambda)^2 - \frac{2\Lambda(\Lambda-1)}{(6+\Lambda)(8+\Lambda)}\, q - \frac{3\left(-17280 - 17760\Lambda - 4792\Lambda^2 + 9\Lambda^3 + 123\Lambda^4 + 10\Lambda^5\right)}{(5+\Lambda)(6+\Lambda)^3 (8+\Lambda)^3 (9+\Lambda)}\, q^2$$
$$+ \frac{6\Lambda(\Lambda-1)\left(-4285440 - 5319168\Lambda - 2548544\Lambda^2 - 595392\Lambda^3 - 68614\Lambda^4 - 2833\Lambda^5 + 111\Lambda^6 + 10\Lambda^7\right)}{(4+\Lambda)(5+\Lambda)(6+\Lambda)^5 (8+\Lambda)^5 (9+\Lambda)(10+\Lambda)}\, q^3 + \ldots$$

$\ldots$

Remarque : si l'on suppose avec Mathematica une valeur propre de la forme a=(2n+1+Λ)², il se trouve que les variables de départ $A_{2l+1}^{\Lambda,0} \quad l \in [0,...,n]$ *pour le système d'équations algébriques sont elles-mêmes en nombre variable, dès lors je n'arrive pas à obtenir un système d'équation intrinsèquement cohérent pour être soluble tout du moins dans Mathematica.*

<u>Développement des solutions périodiques de l'équation de Mathieu associée lorsque q proche de 0 pour un paramètre Λ quelconque</u>

C'est exactement la même approche que j'utilise pour la fonction associée de Mathieu liée à l'équation différentielle suivante :

$$u''(t)+\left(a-2q\,Cos(2t)-\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Sin^2(t)}\right)u(t)=0$$

Pour les 4 types de développements en sinus et cosinus, pairs ou impairs :

$$\begin{cases} cce_{2n}^{\Lambda}(t,q)=(Sin(t))^{\Lambda}\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l}^{\Lambda}(q)\,Cos(2l\,t) & a=a_{2n}^{\Lambda}(q) \\ cce_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)=(Sin(t))^{\Lambda}\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l}^{\Lambda}(q)\,Cos((2l+1)\,t) & a=a_{2n+1}^{\Lambda}(q) \\ cse_{2n+2}^{\Lambda}(t,q)=(Sin(t))^{-\Lambda}\sum_{l=0}^{l=+\infty}B_{2l+2}^{\Lambda}\;Sin((2l+2)\,t) & a=b_{2n+2}^{\Lambda}(q) \\ cse_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)=(Sin(t))^{-\Lambda}\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l}^{\Lambda}(q)\,Sin((2l+1)\,t) & a=b_{2n+1}^{\Lambda}(q) \end{cases}$$

On suppose alors que les valeurs caractéristiques et les coefficients se développent en puissance de q :

$$\begin{cases} a_{2n}^{\Lambda}(q)=(2n+\Lambda)^2+q\;a_{2n}^{\Lambda,1}+q^2\;a_{2n}^{\Lambda,2}+q^3\;a_{2n}^{\Lambda,3}+... \\ a_{2n+1}^{\Lambda}(q)=(2n+1+\Lambda)^2+q\;a_{2n+1}^{\Lambda,1}+q^2\;a_{2n+1}^{\Lambda,2}+q^3\;a_{2n+1}^{\Lambda,3}+... \\ b_{2n+2}^{\Lambda}(q)=(2n+2-\Lambda)^2+q\;b_{2n+2}^{\Lambda,1}+q^2\;b_{2n+2}^{\Lambda,2}+q^3\;b_{2n+2}^{\Lambda,3}+... \\ b_{2n+1}^{\Lambda}(q)=(2n+1-\Lambda)^2+q\;b_{2n+1}^{\Lambda,1}+q^2\;b_{2n+1}^{\Lambda,2}+q^3\;b_{2n+1}^{\Lambda,3}+... \\ A_{2l}^{\Lambda}(q)=A_{2l}^{\Lambda,0}+q\;A_{2l}^{\Lambda,1}+q^2A_{2l}^{\Lambda,2}+q^3A_{2l}^{\Lambda,3}+... \\ A_{2l+1}^{\Lambda}(q)=A_{2l+1}^{\Lambda,0}+q\;A_{2l+1}^{\Lambda,1}+q^2A_{2l+1}^{\Lambda,2}+q^3A_{2l+1}^{\Lambda,3}+... \\ B_{2l+2}^{\Lambda}(q)=B_{2l+2}^{\Lambda,0}+q\;B_{2l+2}^{\Lambda,1}+q^2B_{2l+2}^{\Lambda,2}+q^3\;B_{2l+2}^{\Lambda,3}+... \\ B_{2l+1}^{\Lambda}(q)=B_{2l+1}^{\Lambda,0}+q\;B_{2l+1}^{\Lambda,1}+q^2\;B_{2l+1}^{\Lambda,2}+q^3\;B_{2l+1}^{\Lambda,3}+... \end{cases}$$

Voici le code Mathematica permettant d'obtenir la solution pour le développement pair en cosinus :

```
Clear[q, a, AA, A, w, Ordre, l, j, λ, Λ, LaListeOrdreQ, ListCos, ListeSolve, ListeVariables];
ListeSolve={};
ListeVariables={};
Ordre=7;
w[t_] := Sin[t]^Λ Sum[AA[2 l] Cos[(2 l) t], {l, 0, Ordre}];a=λ[0]+Sum[AppendTo[ListeVariables, λ[l]]; λ[l] q^l, {l, 1, Ordre}];
λ[0]=(Λ)^2;
Do[
   AA[2 l]=Expand[ Sum[AppendTo[ListeVariables, A[2 l, j]];
    A[2 l, j] q^j, {j, 0, Ordre}]]
  , {l, 1, Ordre}
 ];
Expr=TrigReduce[TrigExpand[Factor[Expand[ Sin[t]^-Λ (Sin[t]^2 (w^\[Prime]\[Prime])[t]+(Sin[t]^2 (a-2 q Cos[2 t])-Λ (Λ-1) ) w[t])]]]];
LaListeOrdreQ=Take[CoefficientList[Expr, q], Ordre+1];
Do[
 CArrays=
  Normal[CoefficientArrays[LaListeOrdreQ[[l+1]],
    Table[Cos[2 l t], {l, 1, Ordre}]]];
 If[Dimensions[CArrays] == {2},
     ListCos=CArrays[[2]];
     List0= Simplify[LaListeOrdreQ[[l+1]]- ListCos . Table[Cos[2 l t], {l, 1, Ordre}]];
     If[Not[List0 === 0], AppendTo[ListeSolve, List0 == 0]
    ];
     Scan[If[Not[# === 0], AppendTo[ListeSolve, # == 0]] &, ListCos]
  ]
 , {l, 0, Ordre}];
ListeSolve=Simplify[ListeSolve];
leSolve=Solve[ListeSolve, ListeVariables];
Print[Factor[Take[leSolve[[1]], Ordre]]];
Print[Take[leSolve[[1]], Ordre] /. Λ -> 0];
```

Il suffit d'appliquer ce code pour les valeurs successives λ[0]=(Λ)^2 , λ[0]=(2+Λ)^2, λ[0]=(4+Λ)^2,... pour obtenir à l'ordre 2, 3 ou 4 (suivant la complexité des expressions ordres supérieurs non reproduite ici), les valeurs caractéristiques suivantes :

$$n=0 \rightarrow a_0^\Lambda(q)=\Lambda^2-\frac{2\Lambda}{1+\Lambda}q-\frac{1+2\Lambda}{(1+\Lambda)^3(2+\Lambda)}q^2+\frac{2\Lambda(1+2\Lambda)}{(1+\Lambda)^5(2+\Lambda)(3+\Lambda)}q^3-$$
$$-\frac{(1+2\Lambda)(-21-61\Lambda+46\Lambda^2+76\Lambda^3+20\Lambda^4)}{4(1+\Lambda)^7(2+\Lambda)^3(3+\Lambda)(4+\Lambda)}q^4+\dots$$
$$n=1 \rightarrow a_2^\Lambda(q)=(2+\Lambda)^2-\frac{2\Lambda(\Lambda-1)}{3+4\Lambda+\Lambda^2}q+\frac{45+111\Lambda+33\Lambda^2-19\Lambda^3-10\Lambda^4}{(1+\Lambda)^3(3+\Lambda)^3(4+\Lambda)}q^2+$$
$$+\frac{2\Lambda(-819-2697\Lambda-2676\Lambda^2-1242\Lambda^3-259\Lambda^4+3\Lambda^5+10\Lambda^6)}{(1+\Lambda)^5(3+\Lambda)^5(4+\Lambda)(5+\Lambda)}q^3+\dots$$
$$n=2 \rightarrow a_4^\Lambda(q)=(4+\Lambda)^2-\frac{2\Lambda(\Lambda-1)}{(3+\Lambda)(5+\Lambda)}q-\frac{3(-450-1005\Lambda-575\Lambda^2-29\Lambda^3+37\Lambda^4+6\Lambda^5)}{(2+\Lambda)(3+\Lambda)^3(5+\Lambda)^3(6+\Lambda)}q^2+$$
$$+\frac{6\Lambda(\Lambda-1)(-37350-55065\Lambda-29050\Lambda^2-6950\Lambda^3-638\Lambda^4+23\Lambda^5+6\Lambda^6)}{(2+\Lambda)(3+\Lambda)^5(5+\Lambda)^5(6+\Lambda)(7+\Lambda)}q^3+\dots$$
$$n=3 \rightarrow a_6^\Lambda(q)=(6+\Lambda)^2-\frac{2\Lambda(\Lambda-1)}{(5+\Lambda)(7+\Lambda)}q+\frac{19600+24465\Lambda+8015\Lambda^2+53\Lambda^3-267\Lambda^4-26\Lambda^5}{(4+\Lambda)(5+\Lambda)^3(7+\Lambda)^3(8+\Lambda)}q^2$$
$$+\frac{2\Lambda(\Lambda-1)(-3586800-5310095\Lambda-3012625\Lambda^2-828940\Lambda^3-112554\Lambda^4-5567\Lambda^5+235\Lambda^6+26\Lambda^7)}{(3+\Lambda)(4+\Lambda)(5+\Lambda)^5(7+\Lambda)^7(8+\Lambda)(9+\Lambda)}q^3+\dots$$

...

Voici le code Mathematica permettant d'obtenir la solution pour le développement impair en Cosinus :

```
Clear[q, a, AA, A, w, Ordre, l, j, λ, Λ, LaListeOrdreQ, ListCos, ListeSolve, ListeVariables];
ListeSolve={};
ListeVariables={};
Ordre=5;
w[t_] := Sin[t]^Λ Sum[AA[2 l+1] Cos[(2 l+1) t], {l, 0, Ordre}];
a=λ[0]+Sum[AppendTo[ListeVariables, λ[l]]; λ[l] q^l, {l, 1, Ordre}];
λ[0]=(1+Λ)^2;
Do[
   AA[2 l+1]=Expand[ Sum[AppendTo[ListeVariables, A[2 l+1, j]]; A[2 l+1, j] q^j, {j, 0, Ordre}]]
   , {l, 1, Ordre}
  ];
Expr=TrigReduce[TrigExpand[Factor[Expand[ Sin[t]^-Λ (Sin[t]^2 (w^\[Prime]\[Prime])[t]+(Sin[t]^2 (a-2 q Cos[2 t])-Λ (Λ-1) ) w[t])]]]];
LaListeOrdreQ=Take[CoefficientList[Expr, q], Ordre+1];
Do[
  CArrays=Normal[CoefficientArrays[LaListeOrdreQ[[l+1]], Table[Cos[(2 l+1) t], {l, 0, Ordre}]]];
  If[Dimensions[CArrays] == {2},
      ListCos=CArrays[[2]];
      Scan[If[Not[# === 0], AppendTo[ListeSolve, # == 0]] &, ListCos]
   ]
  , {l, 0, Ordre}];
ListeSolve=Simplify[ListeSolve];
leSolve=Solve[ListeSolve, ListeVariables];
Print[Factor[Take[leSolve[[1]], Ordre]]];
Print[Take[leSolve[[1]], Ordre] /. Λ -> 0];
```

Il suffit d'appliquer ce code pour les valeurs successives λ[0]=(1+Λ)^2,λ[0]=(3+Λ)^2, λ[0]=(5+Λ)^2,... pour obtenir à l'ordre 2, 3 ou 4 (suivant la complexité des expressions ordres supérieurs non reproduite ici), les valeurs caractéristiques suivantes :

$$n=0 \to a_1^{\Lambda}(q)=(1+\Lambda)^2-\frac{2(\Lambda-1)}{2+\Lambda}q-\frac{3(1+2\Lambda)}{(3+\Lambda)(2+\Lambda)^3}q^2+\frac{6(\Lambda-1)(1+2\Lambda)}{(2+\Lambda)(3+\Lambda)(4+\Lambda)^5}q^3-$$

$$-\frac{15(1+2\Lambda)(12-121\Lambda-42\Lambda^2+12\Lambda^3+4\Lambda^4)}{4(2+\Lambda)^7(3+\Lambda)^3(4+\Lambda)(5+\Lambda)}q^4+\dots$$

$$n=1 \to a_3^{\Lambda}(q)=(3+\Lambda)^2-\frac{2\Lambda(\Lambda-1)}{(2+\Lambda)(4+\Lambda)}q-\frac{-160-464\Lambda-108\Lambda^2+43\Lambda^3+14\Lambda^4}{(2+\Lambda)^3(4+\Lambda)^3(5+\Lambda)}q^2+$$

$$+\frac{2(\Lambda-1)(-7680-22976\Lambda-18272\Lambda^2-6272\Lambda^3-862\Lambda^4+23\Lambda^5+14\Lambda^6)}{(2+\Lambda)^5(4+\Lambda)^5(5+\Lambda)(6+\Lambda)}q^3+\dots$$

$$n=2 \to a_5^{\Lambda}(q)=(5+\Lambda)^2-\frac{2\Lambda(\Lambda-1)}{(4+\Lambda)(6+\Lambda)}q-\frac{-6048-9648\Lambda-4020\Lambda^2-87\Lambda^3+181\Lambda^4+22\Lambda^5}{(3+\Lambda)(4+\Lambda)^3(6+\Lambda)^3(7+\Lambda)}q^2+$$

$$+\frac{2\Lambda(\Lambda-1)(-387072-519840\Lambda-237408\Lambda^2-47808\Lambda^3-3603\Lambda^4+109\Lambda^5+22\Lambda^6)}{(3+\Lambda)(4+\Lambda)^5(6+\Lambda)^5(7+\Lambda)(8+\Lambda)}q^3+\dots$$

$$n=3 \to a_7^{\Lambda}(q)=(7+\Lambda)^2-\frac{2\Lambda(\Lambda-1)}{(6+\Lambda)(8+\Lambda)}q-\frac{3(-17280-17760\Lambda-4792\Lambda^2+9\Lambda^3+123\Lambda^4+10\Lambda^5)}{(5+\Lambda)(6+\Lambda)^3(8+\Lambda)^3(9+\Lambda)}q^2$$

$$+\frac{6\Lambda(\Lambda-1)(-4285440-5319168\Lambda-2548544\Lambda^2-595392\Lambda^3-68614\Lambda^4-2833\Lambda^5+111\Lambda^6+10\Lambda^7)}{(4+\Lambda)(5+\Lambda)(6+\Lambda)^5(8+\Lambda)^5(9+\Lambda)(10+\Lambda)}q^3+\dots$$

...

Remarque : notons que pour la valeur Λ=-1/2, certains développements de valeurs caractéristiques se simplifient :

$$a_0^\Lambda(q) = \Lambda^2 - \frac{2\Lambda}{1+\Lambda}q = \frac{1}{4} + 2q$$
$$a_1^\Lambda(q) = (1+\Lambda)^2 - \frac{2(\Lambda-1)}{2+\Lambda}q = \frac{1}{4} + 2q$$

Ce sont effectivement les valeurs exactes des caractéristiques de l'équation de Mathieu associées. Toutefois ces valeurs ne sont pas nouvelles, car ce sont celles qui correspondent à la solution algébrique la plus simple de l'équation des ondes sphéroïdales. En effet :

$$\Lambda = \frac{1}{2} - \mu \qquad q = \frac{\gamma^2}{4} \qquad a = \omega + \frac{1}{4} + \frac{\gamma^2}{2} = \frac{1}{4} + 2q \Rightarrow \begin{cases} \mu = 1 \\ \omega = 0 \end{cases}$$

les solutions de l'équation intermédiaire de Mathieu associée sont :

$$u(t) = A\,Cos\left(2\sqrt{q}Cos(t)\right) + B\,Sin\left(2\sqrt{q}Cos(t)\right)$$

Cela correspond à une solution algébrique de l'équation sphéroïdale bien connue :

$$y(x) = \frac{A\,Cos\left(2\sqrt{q}x\right) + B\,Sin\left(2\sqrt{q}x\right)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{A\,Cos(\gamma\ x) + B\,Sin(\gamma\ x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

On peut imaginer que les développements pour des valeurs de Λ=-3/2, -5/2, -7/2 correspondent effectivement aux valeurs analytiques des autres solutions algébriques de l'équation des ondes sphéroïdales pour μ=2,3,4,...

Voici le code Mathematica permettant d'obtenir la solution pour le développement pair en sinus:

```
Clear[q, a, AA, A, w, Ordre, l, j, λ, Λ,
  LaListeOrdreQ, ListCos, ListeSolve, ListeVariables];
ListeSolve={};
ListeVariables={};
Ordre=6;
w[t_] := Sin[t]^-Λ Sum[AA[2 l+2] Sin[(2 l+2) t], {l, 0, Ordre}];
a=λ[0]+Sum[AppendTo[ListeVariables, λ[l]]; λ[l] q^l, {l, 1, Ordre}];
λ[0]=(2-Λ)^2;
Do[
   AA[2 l+2]=Expand[ Sum[AppendTo[ListeVariables, A[2 l+2, j]];
    A[2 l+2, j] q^j, {j, 0, Ordre}]]
   , {l, 1, Ordre}
  ];
Expr=TrigReduce[TrigExpand[Factor[Expand[ Sin[t]^Λ (Sin[t]^2 (w^\[Prime]\[Prime])[t]+(Sin[t]^2 (a-2 q Cos[2 t])-Λ (Λ-1) ) w[t])]]]]];
LaListeOrdreQ=Take[CoefficientList[Expr, q], Ordre+1];
Do[
  CArrays=Normal[CoefficientArrays[LaListeOrdreQ[[l+1]], Table[Sin[(2 l+2) t], {l, 0, Ordre}]]];
  If[Dimensions[CArrays] == {2},
      ListSin=CArrays[[2]];
      Scan[If[Not[# === 0], AppendTo[ListeSolve, # == 0]] &, ListSin]
   ]
  , {l, 0, Ordre}];
ListeSolve=Simplify[ListeSolve];
leSolve=Solve[ListeSolve, ListeVariables];
Print[Factor[Take[leSolve[[1]], Ordre]]];
Print[Take[leSolve[[1]], Ordre] /. Λ -> 0];
```

Il suffit d'appliquer ce code pour les valeurs successives λ[0]=(2-Λ)^2 , λ[0]=(4-Λ)^2, λ[0]=(6-Λ)^2,... pour obtenir à l'ordre 2, 3 ou 4 (suivant la complexité des expressions ordres supérieurs non reproduite ici), les valeurs caractéristiques suivantes :

$$n=0 \to b_2^{\Lambda}(q)=(2-\Lambda)^2-\frac{2\Lambda}{\Lambda-3}q+\frac{3(2\Lambda-3)}{(\Lambda-3)^3(\Lambda-4)}q^2-\frac{6\Lambda(2\Lambda-3)}{(\Lambda-3)^5(\Lambda-4)(\Lambda-5)}q^3-$$
$$-\frac{15(2\Lambda-3)(-135+153\Lambda+18\Lambda^2-28\Lambda^3+4\Lambda^4)}{4(\Lambda-3)^7(\Lambda-4)^3(\Lambda-5)(\Lambda-6)}q^4+\ldots$$

$$n=1 \to b_4^{\Lambda}(q)=(4-\Lambda)^2-\frac{2\Lambda(\Lambda-1)}{(\Lambda-3)(\Lambda-5)}q+\frac{-675+495\Lambda+105\Lambda^2-99\Lambda^3+14\Lambda^4}{(\Lambda-3)^3(\Lambda-5)^3(\Lambda-6)}q^2-$$
$$-\frac{2\,\Lambda(-56025+81585\Lambda-41820\Lambda^2+9210\Lambda^3-537\Lambda^4-107\Lambda^5+14\Lambda^6)}{(\Lambda-3)^5(\Lambda-5)^5(\Lambda-6)(\Lambda-7)}q^3+\ldots$$

$$n=2 \to b_6^{\Lambda}(q)=(6-\Lambda)^2-\frac{2\Lambda(\Lambda-1)}{(\Lambda-5)(\Lambda-7)}q+\frac{19600-17115\Lambda+2975\Lambda^2+857\Lambda^3-291\Lambda^4+22\Lambda^5}{(\Lambda-4)(\Lambda-5)^3(\Lambda-7)^3(\Lambda-8)}q^2-$$
$$-\frac{2\Lambda(\Lambda-1)(-1195600+1151815\Lambda-401030\Lambda^2+60690\Lambda^3-2728\Lambda^4-241\Lambda^5+22\Lambda^6)}{(\Lambda-4)(\Lambda-5)^5(\Lambda-7)^5(\Lambda-8)(\Lambda-9)}q^3+\ldots$$

$$n=3 \to b_8^{\Lambda}(q)=(8-\Lambda)^2-\frac{2\Lambda(\Lambda-1)}{(\Lambda-7)(\Lambda-9)}q+\frac{3(39690-26775\,\Lambda+3927\Lambda^2+601\Lambda^3-173\Lambda^4+10\Lambda^5)}{(\Lambda-6)(\Lambda-7)^3(\Lambda-9)^3(\Lambda-10)}q^2-$$
$$-\frac{6\Lambda(\Lambda-1)(12819870-12490317\Lambda+4772859\Lambda^2-895608\Lambda^3+80764\Lambda^4-1957\Lambda^5-181\Lambda^6+10\Lambda^7)}{(\Lambda-5)(\Lambda-6)(\Lambda-7)^5(\Lambda-9)^5(\Lambda-10)(\Lambda-11)}q^3+\ldots$$

...

En fait il s'agit des mêmes valeurs propres que pour les développements impairs mais en réalisant la substitution Λ->1- Λ.

Voici le code Mathematica permettant d'obtenir la solution pour le développement impair en sinus:

```
Clear[q, a, AA,A, w, Ordre, l, j, λ, Λ, LaListeOrdreQ, ListCos, ListeSolve, ListeVariables];
ListeSolve={};
ListeVariables={};
Ordre=7;
w[t_] := Sin[t]^-Λ Sum[AA[2 l+1] Sin[(2 l+1) t], {l, 0, Ordre}];
a=λ[0]+ Sum[AppendTo[ListeVariables, λ[l]]; λ[l] q^l, {l, 1, Ordre}];
λ[0]=(3-Λ)^2;
Do[
   AA[2 l+1]= Expand[ Sum[AppendTo[ListeVariables, A[2 l+1, j]]; A[2 l+1, j] q^j, {j, 0, Ordre}]]
   , {l, 1, Ordre}
  ];
Expr=TrigReduce[TrigExpand[Factor[Expand[ Sin[t]^Λ (Sin[t]^2 (w^\[Prime]\[Prime])[t]+(Sin[t]^2 (a-2 q Cos[2 t])-Λ (Λ-1) ) w[t])]]]]];
LaListeOrdreQ=Take[CoefficientList[Expr, q], Ordre+1];
Do[
  CArrays=Normal[CoefficientArrays[LaListeOrdreQ[[l+1]], Table[Sin[(2 l+1) t], {l, 0, Ordre}]]];
  If[Dimensions[CArrays] == {2},
      ListSin=CArrays[[2]];
      Scan[If[Not[# === 0], AppendTo[ListeSolve, # == 0]] &, ListSin]
   ]
  , {l, 0, Ordre}];
ListeSolve=Simplify[ListeSolve];
leSolve=Solve[ListeSolve, ListeVariables];
Print[Factor[Take[leSolve[[1]], Ordre]]];
Print[Take[leSolve[[1]], Ordre] /. Λ -> 0];
```

Il suffit d'appliquer ce code pour les valeurs successives λ[0]=(1-Λ)^2,λ[0]=(3-Λ)^2, λ[0]=(5-Λ)^2,... pour obtenir à l'ordre 2, 3 ou 4 (suivant la complexité des expressions ordres supérieurs non reproduite ici), les valeurs caractéristiques suivantes :

$$n=0 \to b_1^{\Lambda}(q)=(1-\Lambda)^2-\frac{2(\Lambda-1)}{\Lambda-2}q+\frac{2\Lambda-3}{(\Lambda-2)^3(\Lambda-3)}q^2-\frac{2(\Lambda-1)(2\Lambda-3)}{(\Lambda-2)^5(\Lambda-3)(\Lambda-4)}q^3+$$
$$+\frac{(2\Lambda-3)\left(60-339\Lambda+394\Lambda^2-156\Lambda^3+20\Lambda^4\right)}{4(\Lambda-2)^7(\Lambda-3)^3(\Lambda-4)(\Lambda-5)}q^4+\dots$$
$$n=1 \to b_3^{\Lambda}(q)=(3-\Lambda)^2-\frac{2\Lambda(\Lambda-1)}{(\Lambda-2)(\Lambda-4)}q+\frac{-160+80\Lambda+84\Lambda^2-59\Lambda^3+10\Lambda^4}{(\Lambda-2)^3(\Lambda-4)^3(\Lambda-5)}q^2-$$
$$-\frac{2(\Lambda-1)\left(-7680+12736\Lambda-7776\Lambda^2+2048\Lambda^3-94\Lambda^4-63\Lambda^5+10\Lambda^6\right)}{(\Lambda-2)^5(\Lambda-4)^5(\Lambda-5)(\Lambda-6)}q^3+\dots$$
$$n=2 \to b_5^{\Lambda}(q)=(5-\Lambda)^2-\frac{2\Lambda(\Lambda-1)}{(\Lambda-4)(\Lambda-6)}q+\frac{3\left(2016-2064\Lambda+380\Lambda^2+179\Lambda^3-67\Lambda^4+6\Lambda^5\right)}{(\Lambda-3)(\Lambda-4)^3(\Lambda-6)^3(\Lambda-7)}q^2-$$
$$-\frac{6\Lambda(\Lambda-1)\left(-129024+136416\Lambda-53408\Lambda^2+9152\Lambda^3-433\Lambda^4-59\Lambda^5+6\Lambda^6\right)}{(\Lambda-3)(\Lambda-4)^5(\Lambda-6)^5(\Lambda-7)(\Lambda-8)}q^3+\dots$$
$$n=3 \to b_7^{\Lambda}(q)=(7-\Lambda)^2-\frac{2\Lambda(\Lambda-1)}{(\Lambda-6)(\Lambda-8)}q+\frac{51840-39456\Lambda+6312\Lambda^2+1275\Lambda^3-397\Lambda^4+26\Lambda^5}{(\Lambda-5)(\Lambda-6)^3(\Lambda-8)^3(\Lambda-9)}q^2-$$
$$-\frac{2\Lambda(\Lambda-1)\left(12856320-14298624\Lambda+6226368\Lambda^2-1329216\Lambda^3+135954\Lambda^4-3611\Lambda^5-417\Lambda^6+26\Lambda^7\right)}{(\Lambda-4)(\Lambda-5)(\Lambda-6)^5(\Lambda-8)^5(\Lambda-9)(\Lambda-10)}q^3+\dots$$

...

En fait il s'agit des mêmes valeurs propres que pour les développements pairs mais en réalisant la substitution Λ->1- Λ.

Solutions algébriques des équations différentielles de Mathieu associées

A l'occasion du point précédent, nous avons vu que les développement des valeurs caractéristiques lorsque q proche de 0 se simplifiaient grandement pour la valeur Λ=-1/2 :

$$a_0^{\Lambda}(q) = \Lambda^2 - \frac{2\Lambda}{1+\Lambda}\, q = \frac{1}{4} + 2q$$
$$a_1^{\Lambda}(q) = (1+\Lambda)^2 - \frac{2(\Lambda-1)}{2+\Lambda}\, q = \frac{1}{4} + 2q$$

Il s'agit des valeurs exactes des caractéristiques de l'équation de Mathieu associées liée à des solutions algébriques (voir le document sur l'équation des ondes sphéroïdales avec μ de valeur entière) : $\begin{cases}\mu = 1\\ \omega = 0\end{cases} \quad \Lambda = \frac{1}{2} - \mu = -\frac{1}{2} \qquad q = \frac{\gamma^2}{4} \quad a = \omega + \frac{1}{4} + \frac{\gamma^2}{2} = \frac{1}{4} + 2q$ *. Les solutions de l'équation intermédiaire de Mathieu associée sont* $u(t) = A\, Cos\left(2\sqrt{q}Cos(t)\right) + B\, Sin\left(2\sqrt{q}Cos(t)\right)$*. Je rappelle le lien avec entre les fonctions de Mathieu associées intermédiaires et les fonctions sphéroïdales :*

$$\begin{cases}(1-x^2)\dfrac{d^2y(x)}{dx^2} - 2x\dfrac{dy(x)}{dx} + \left(\omega + 4\,q(1-x^2) - \dfrac{\mu^2}{1-x^2}\right)y(x) = 0\\ y(x) = (Sin(t))^{-\mu}\, u(t) \Leftrightarrow u''(t) + (1-2\mu)\,Cotan(t)\,u'(t) + (\omega + \mu(1-\mu) + 2q(1-Cos(2t)))\,u(t) = 0\end{cases}$$

Insérons dans l'équation intermédiaire de Mathieu associée un « ansatz » de la forme : $u(t) = e^{2i\sqrt{q}\,Cos(t)}\, P_\mu(Cos(t)) \qquad \mu = \frac{1}{2} - \Lambda \qquad P_\mu(x) = \sum_{l=0}^{l=\mu-1} a_l x^l \quad a_{\mu-1} = 1$ *, où Pμ est un polynôme de degré μ-1 en Cos(t). La construction des solutions est identique à celle des solutions algébriques l'équation des ondes sphéroïdales, à savoir, pour* $\mu = 2 \quad \Lambda = -\frac{3}{2} \quad a = \omega + \frac{1}{4} + 2q$*, la solution est de la forme :*

$$u(t) = e^{2i\sqrt{q}\,Cos(t)}\left(Cos(t) + i\,\frac{\omega}{4\sqrt{q}}\right) \qquad avec \quad \omega \text{ solution de} \quad P_2(\omega) = \omega\,(\omega-2) + 16\,q = 0$$

Pour $\mu = 3 \quad \Lambda = -\frac{5}{2} \quad a = \omega + \frac{1}{4} + 2q$*, la solution est de la forme :*

$$u(t) = e^{2i\sqrt{q}\,Cos(t)}\left(Cos^2(t) + i\,\frac{\omega}{4\sqrt{q}}Cos(t) + \frac{\omega(2-\omega) - 32q}{32\,q}\right) \qquad avec \quad \omega \text{ solution de} \quad P_3(\omega) = \omega\,(\omega-2)(\omega-6) + 64\,q\,(\omega-4) = 0$$

Pour $\mu = 4 \quad \Lambda = -\frac{7}{2} \quad a = \omega + \frac{1}{4} + 2q$*, la solution est de la forme :*

$$u(t) = e^{2i\sqrt{q}\,Cos(t)}\left(Cos^3(t) + i\,\frac{\omega}{4\sqrt{q}}\,Cos^2(t) + \frac{\omega\,(2-\omega) - 48q}{32\,q}\,Cos(t) + i\,\frac{q\,(480 - 112\,\omega) - \omega\,(\omega-2)(\omega-6)}{384\,q\sqrt{q}}\right)$$
$$avec \quad \omega \text{ solution de} \quad P_4(\omega) = \omega(\omega-2)(\omega-6)(\omega-12) + 32q\,(5\,\omega^2 - 66\,\omega + 180) = 0$$

La récurrence générale que l'on peut établir sur ces solutions algébriques est identique à celle obtenue sur les fonctions sphéroïdales. Les valeurs propres ω racines du polynôme s'obtiennent en remplaçant dans l'équation différentielle sphéroïdale un polynôme de la forme : $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ *pour ne retenir que le terme de degré 0 qui doit s'annuler également, soit la condition sur les trois coefficients :* $a_0(\omega + \mu(1-\mu)) + 2\left(i\, q\sqrt{2}\; a_1 + a_2\right) = 0$. *Cette expression constitue un polynôme de degré m en λ. En prenant le motif suivant intégré dans l'équation équivalente différentielle des ondes sphéroïdales :* $a_l x^l + a_{l+1}x^{l+1} + a_{l+2}x^{l+2} + a_{l+3}x^{l+3} + a_{l+4}x^{l+4} + a_{l+5}x^{l+5}$. *Puis en recherchant le terme de puissance de x comportant 4 termes successifs, il y en a trois mais qui se déduisent l'un de l'autre par translation d'indice puis en annulant l'un des trois termes, on obtient* *<u>la relation de récurrence suivante</u> :*

$$\begin{cases} a_\mu = 0 \qquad a_{\mu-1} = 1 \qquad a_{\mu-2} = \dfrac{i\,\omega}{4\sqrt{q}} \\ \ldots \\ -4\,i\,\sqrt{q}\,(l+1-\mu)\,a_l - \left(2 + l^2 - \omega + l\,(3-2\mu) - 3\mu + \mu^2\right) a_{l+1} + (l+2)\left(4\,i\,\sqrt{q}\;a_{l+2} + (l+3)\,a_{l+3}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = a_0(\omega) \quad \textit{polynôme de degré } \mu - 1 \textit{ en } \omega \\ a_1 = a_1(\omega) \quad \textit{polynôme de degré } \mu - 2 \textit{ en } \omega \\ \ldots \\ a_{\mu-2} = a_{\mu-2}(\omega) \quad \textit{polynôme de degré } 1 \textit{ en } \omega \\ a_{\mu-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow a_0(\omega + \mu(1-\mu)) + 2\left(2i\,\sqrt{q}\;a_1 + a_2\right) = 0 \quad \textit{polynôme de degré } \mu \textit{ en } \omega$$

Pour l'exemple les premiers termes du développement s'écrivent :

$$\begin{cases} u(t) = e^{2i\sqrt{q}\,Cos(t)}\left\{Cos^{\mu-1}(t) + i\,\dfrac{\omega}{4\sqrt{q}}\,Cos^{\mu-2}(t) + \dfrac{\omega\,(2-\omega) + 16(1-\mu)q}{32\,q}\,Cos^{\mu-3}(t) + i\,\dfrac{16\,q\,\omega\,(5-3\mu) + 32\,q\,(\mu^2-1) - \omega(\omega-2)(\omega-6)}{384\,q\sqrt{q}}\,Cos^{\mu-4}(t) + \ldots\right\} \\ \mu > 0 \end{cases}$$

Correspondance entre les valeurs caractéristiques des équations différentielles de Mathieu associées et des équations différentielles de Mathieu associées intermédiaires

On a donc essentiellement 6 types d'équations différentielles reliées entre-elles, et pour chacun des deux groupes 2x4 solutions, notons les comme ceci :

$$x = Cos(t)\quad\begin{cases} w''(t)+2\Lambda\,Cotan(t)\,w'(t)+\left(a_{2n}^{c,m}(\Lambda,q)-\Lambda^2+2q\,Cos(2t)\right)w(t)=0 \rightarrow ccei_{2n}^{\Lambda}(t,q)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l}^{\Lambda}(q)\,Cos(2l\,t) \\ w''(t)+2\Lambda\,Cotan(t)\,w'(t)+\left(a_{2n+1}^{c,m}(\Lambda,q)-\Lambda^2+2q\,Cos(2t)\right)w(t)=0 \rightarrow ccei_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l+1}^{\Lambda}(q)\,Cos((2l+1)\,t) \\ w''(t)+2(1-\Lambda)\,Cotan(t)\,w'(t)+\left(a_{2n}^{c,m}(1-\Lambda,q)-(1-\Lambda)^2+2q\,Cos(2t)\right)w(t)=0 \rightarrow ccei_{2n}^{1-\Lambda}(t,q)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l}^{1-\Lambda}(q)\,Cos(2l\,t) \\ w''(t)+2(1-\Lambda)\,Cotan(t)\,w'(t)+\left(a_{2n+1}^{c,m}(1-\Lambda,q)-(1-\Lambda)^2+2q\,Cos(2t)\right)w(t)=0 \rightarrow ccei_{2n+1}^{1-\Lambda}(t,q)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l+1}^{1-\Lambda}(q)\,Cos((2l+1)\,t) \\ g''(t)+\left(a_{2n}^{c}(\Lambda,q)-2q\,Cos(2t)-\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Sin^2(t)}\right)g(t)=0 \rightarrow cce_{2n}^{\Lambda}(t,q)=\left(Sin^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l}^{\Lambda}(q)\,Cos(2l\,t) \\ g''(t)+\left(a_{2n+1}^{c}(\Lambda,q)-2q\,Cos(2t)-\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Sin^2(t)}\right)g(t)=0 \rightarrow cce_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)=\left(Sin^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l+1}^{\Lambda}(q)\,Cos((2l+1)\,t) \\ g''(t)+\left(b_{2n+2}^{c}(\Lambda,q)-2q\,Cos(2t)-\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Sin^2(t)}\right)g(t)=0 \rightarrow cse_{2n+2}^{\Lambda}(t,q)=\left(Sin^2(t)\right)^{-\frac{\Lambda}{2}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}B_{2l+2}^{\Lambda}(q)\,Sin((2l+2)\,t) \\ g''(t)+\left(b_{2n+1}^{c}(\Lambda,q)-2q\,Cos(2t)-\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Sin^2(t)}\right)g(t)=0 \rightarrow cse_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)=\left(Sin^2(t)\right)^{-\frac{\Lambda}{2}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}B_{2l+1}^{\Lambda}(q)\,Sin((2l+1)\,t) \end{cases}$$

$$x = Sin(t)\quad\begin{cases} w''(t)-2\Lambda\,Tan(t)\,w'(t)+\left(a_{2n}^{s,m}(\Lambda,q)-\Lambda^2-2qCos(2t)\right)w(t)=0 \rightarrow scei_{2n}^{\Lambda}(t,q)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l}^{\Lambda}(q)\,Cos(2l\,t) \\ w''(t)-2\Lambda\,Tan(t)\,w'(t)+\left(b_{2n+1}^{s,m}(\Lambda,q)-\Lambda^2-2qCos(2t)\right)w(t)=0 \rightarrow ssei_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}B_{2l+1}^{\Lambda}(q)\,Sin((2l+1)\,t) \\ w''(t)-2(1-\Lambda)\,Tan(t)\,w'(t)+\left(a_{2n}^{s,m}(1-\Lambda,q)-(1-\Lambda)^2-2qCos(2t)\right)w(t)=0 \rightarrow scei_{2n}^{1-\Lambda}(t,q)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l}^{1-\Lambda}(q)\,Cos(2l\,t) \\ w''(t)-2(1-\Lambda)\,Tan(t)\,w'(t)+\left(b_{2n+1}^{s,m}(1-\Lambda,q)-(1-\Lambda)^2-2qCos(2t)\right)w(t)=0 \rightarrow ssei_{2n+1}^{1-\Lambda}(t,q)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}B_{2l+1}^{1-\Lambda}(q)\,Sin((2l+1)\,t) \\ g''(t)+\left(a_{2n}^{s}(\Lambda,q)+2q\,Cos(2t)-\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Cos^2(t)}\right)g(t)=0 \rightarrow sce_{2n}^{\Lambda}(t,q)=\left(Cos^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l}^{\Lambda}(q)\,Cos(2l\,t) \\ g''(t)+\left(a_{2n+1}^{s}(\Lambda,q)+2q\,Cos(2t)-\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Cos^2(t)}\right)g(t)=0 \rightarrow sce_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)=\left(Cos^2(t)\right)^{-\frac{\Lambda}{2}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}A_{2l+1}^{\Lambda}(q)\,Cos((2l+1)\,t) \\ g''(t)+\left(b_{2n+2}^{s}(\Lambda,q)+2q\,Cos(2t)-\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Cos^2(t)}\right)g(t)=0 \rightarrow sse_{2n+2}^{\Lambda}(t,q)=\left(Cos^2(t)\right)^{-\frac{\Lambda}{2}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}B_{2l+2}^{\Lambda}(q)\,Sin((2l+2)\,t) \\ g''(t)+\left(b_{2n+1}^{s}(\Lambda,q)+2q\,Cos(2t)-\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Cos^2(t)}\right)g(t)=0 \rightarrow sse_{2n+1}^{\Lambda}(t,q)=\left(Cos^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}B_{2l+1}^{\Lambda}(q)\,Sin((2l+1)\,t) \end{cases}$$

Par ailleurs notons bien que pour les équations différentielles de Mathieu associées intermédiaires, je n'ai réussi à faire converger la récurrence à 4 termes que pour les valeurs de μ demi-entières, donc pour des valeurs de Λ entières.

Les formules de liaison de ces diverses valeurs caractéristiques sont les suivantes :

$$x = Cos(t) \qquad \begin{cases} a_{2n}^{c}(\Lambda,q) = a_{2n}^{c,m}(\Lambda,-q) \\ a_{2n+1}^{c}(\Lambda,q) = a_{2n+1}^{c,m}(\Lambda,-q) \\ b_{2n+1}^{c}(\Lambda,q) = a_{2n}^{c,m}(1-\Lambda,-q) \\ b_{2n+2}^{c}(\Lambda,q) = a_{2n+3}^{c,m}(1-\Lambda,-q) \end{cases}$$

$$x = Sin(t) \qquad \begin{cases} a_{2n}^{s}(\Lambda,q) = a_{2n}^{s,m}(\Lambda,-q) \\ a_{2n+1}^{s}(\Lambda,q) = a_{2n}^{s,m}(1-\Lambda,-q) \\ b_{2n+2}^{s}(\Lambda,q) = b_{2n+3}^{s,m}(1-\Lambda,-q) \\ b_{2n+1}^{s}(\Lambda,q) = b_{2n+1}^{s,m}(\Lambda,-q) \end{cases}$$

<u>*Construction de solution de l'équation de Mathieu associée modifiée*</u>

Cette construction est très liée à celle des fonctions d'onde sphéroïdales radiales par un développement sous forme de fonctions de Bessel sphériques :

$$\begin{cases} x \in [1,+\infty] \qquad S_{\nu}^{(i),\mu}(x,\gamma^2) = \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_{\nu,k}^{\mu}(\gamma^2) f_{\nu+2k}(\gamma\ x) \quad i = 1,2,3,4 \\ Fonctions\ de\ Bessel\ Sphériques\ f_{\nu+2k}^{(i)}(x) \quad f^{(i)} = j, y, h^{(1)}, h^{(2)} \end{cases}$$

Cette construction conduit à une récurrence similaire à celles des fonctions angulaires sous cette forme :

$$\widetilde{A}_k r_{\nu,k-1}^{\mu}(\gamma^2) + \left(\widetilde{B}_k - \lambda(\gamma^2)\right) r_{\nu,k}^{\mu}(\gamma^2) + \widetilde{C}_k r_{\nu,k+1}^{\mu}(\gamma^2) = 0 \qquad k \in \{-\infty,\ldots,-1,\ldots,0,1,\ldots,+\infty\}$$

$$\begin{cases} \widetilde{A}_k = -\gamma^2 \frac{(\nu+\mu+2k-1)(\nu+\mu+2k)}{(2\nu+4k-3)(2\nu+4k-1)} \\ \widetilde{B}_k = (\nu+2k)(\nu+2k+1) - 2\gamma^2 \frac{(\nu+2k)(\nu+2k+1)+\mu^2-1}{(2\nu+4k-1)(2\nu+4k+3)} \\ \widetilde{C}_k = -\gamma^2 \frac{(\nu-\mu+2k+1)(\nu-\mu+2k+2)}{(2\nu+4k+3)(2\nu+4k+5)} \end{cases}$$

$$\text{Pôles possibles sur} \quad \frac{1}{2\nu+4k-3}, \frac{1}{2\nu+4k-1}, \frac{1}{2\nu+4k+3}, \frac{1}{2\nu+4k+5}$$

Cette récurrence présente également des pôles pour les valeurs de v demi-entières. Aussi il est également nécessaire d'envisager une autre forme de construction des fonctions sphéroïdales.

Exprimons par exemple la fonction sphéroïdale radiale de première espèce :

$$\begin{cases} S_{\nu}^{(1),\mu}(x,\gamma^2) = \frac{(x^2-1)^{\frac{\mu}{2}}}{x^{\mu}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} r_{\nu,k}^{\mu}(\gamma^2) j_{\nu+2k}(\gamma\ x) \\ j_{\nu}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{\nu+\frac{1}{2}}(\gamma\ x)}{\sqrt{x}} \Rightarrow S_{\nu}^{(1),\mu}(x,\gamma^2) = \frac{(x^2-1)^{\frac{\mu}{2}}}{x^{\mu+\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} r_{\nu,k}^{\mu}(\gamma^2) J_{\nu+\frac{1}{2}+2k}(\gamma\ x) \end{cases}$$

D'une manière tout aussi similaire à la construction des solutions radiales de l'équation de Mathieu modifiées, il est envisageable d'introduire l'équation différentielle des fonctions associées de Mathieu modifiées. Pour cela il suffit d'introduire ce que j'appellerais la forme de Liouville « hyperbolique » de l'équation différentielle sphéroïdale. Elle est obtenue avec le changement de variable x=Cosh(t) :

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y(x)}{dx^2}-2x\frac{dy(x)}{dx}+\left(\omega+\gamma^2\left(1-x^2\right)-\frac{\mu^2}{1-x^2}\right)y(x)=0 \qquad x=Cosh(t)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y(x)=\left(Sinh^2(t)\right)^{\frac{\mu}{2}}w(t)=\left(Cosh^2(t)-1\right)^{\frac{\Lambda}{2}-\frac{1}{4}}w(t) \\ \Lambda=\frac{1}{2}+\mu \qquad q=\frac{\gamma^2}{4} \\ a=\omega+\Lambda^2+\frac{\gamma^2}{2}-\mu-\mu^2=\omega+\frac{\gamma^2}{2}+\frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow w''(t)+2\Lambda\,Cotanh(t)\,w'(t)-\left(a-\Lambda^2-2q\,Cosh(2t)\right)w(t)=0$$

Une forme équivalente est obtenue avec y=i Sinh(t) :

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y(x)}{dx^2}-2x\frac{dy(x)}{dx}+\left(\omega+\gamma^2\left(1-x^2\right)-\frac{\mu^2}{1-x^2}\right)y(x)=0 \qquad x=i\,Sinh(t)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y(x)=\left(Cosh^2(t)\right)^{\frac{\mu}{2}}w(t)=\left(Sinh^2(t)+1\right)^{\frac{\Lambda}{2}-\frac{1}{4}}w(t) \\ \Lambda=\frac{1}{2}+\mu \qquad q=-\frac{\gamma^2}{4} \\ a=\omega+\frac{\gamma^2}{2}+\frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow w''(t)+2\Lambda\,Tanh(t)\,w'(t)-\left(a-\Lambda^2+2q\,Cosh(2t)\right)w(t)=0$$

En transcrivant le procédé de l'article de 1923 de E.L.Ince, « Associated Mathieu Functions », le point de départ est la forme de Liouville « hyperbolique » suivante :

$$\begin{cases} x = Cosh(t) \\ y(x) = \left(Sinh^2(t)\right)^{-\frac{1}{4}} g(t) \Rightarrow g(t) = \left(Cosh^2(t)-1\right)^{\frac{\Lambda}{2}} w(t) \\ \Lambda = \frac{1}{2}+\mu \qquad q = \frac{\gamma^2}{4} \\ a = \omega + \frac{1}{4} + \frac{\gamma^2}{2} \end{cases} \Rightarrow g''(t) - \left(a - 2q\ Cosh(2t) + \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Sinh^2(t)} \right) g(t) = 0$$

Une forme équivalente est obtenue avec y=i Sinh(t) :

$$\begin{cases} x = i\ Sinh(t) \\ y(x) = \left(Cosh^2(t)\right)^{-\frac{1}{4}} g(t) \Rightarrow g(t) = \left(Sinh^2(t)+1\right)^{\frac{\Lambda}{2}} w(t) \\ \Lambda = \frac{1}{2}+\mu \qquad q = -\frac{\gamma^2}{4} \\ a = \omega + \frac{1}{4} + \frac{\gamma^2}{2} \end{cases} \Rightarrow g''(t) - \left(a - 2q\ Cosh(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Cosh^2(t)} \right) g(t) = 0$$

Si l'on doit se référer aux équations différentielles de Mathieu associées, avec leur forme intermédiaires :

$$\begin{cases} w''(t) + 2\Lambda\ Cotan(t)\ w'(t) + \left(a - \Lambda^2 - 2q\ Cos(2t)\right) w(t) = 0 \\ w''(t) - 2\Lambda\ Tan(t)\ w'(t) + \left(a - \Lambda^2 + 2q\ Cos(2t)\right) w(t) = 0 \\ g''(t) + \left(a - 2q\ Cos(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Sin^2(t)} \right) g(t) = 0 \\ g''(t) + \left(a - 2q\ Cos(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Cos^2(t)} \right) g(t) = 0 \end{cases}$$

On voit qu'il suffit d'effectuer la transformation t->i t, pour obtenir les équation différentielles de Mathieu associées modifiées.

Aussi une telle construction est donc en théorie possible avec toutes les formes de développement en sinus hyperbolique, par exemple :

$$\begin{cases} x = Cos(t) \\ g''(t) + \left(a - 2q\ Cos(2t) - \dfrac{\Lambda(\Lambda-1)}{Sin^2(t)} \right) = 0 \\ g(t) = \left(Sin^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}} \sum\limits_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l} Cos(2l\ t) \\ g(t) = \left(Sin^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}} \sum\limits_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1} Cos((2l+1)\,t) \\ g(t) = \left(Sin^2(t)\right)^{-\frac{\Lambda}{2}} \sum\limits_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1} Sin((2l+1)\,t) \\ g(t) = \left(Sin^2(t)\right)^{-\frac{\Lambda}{2}} \sum\limits_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+2} Sin((2l+2)\,t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = Cosh(t) \\ g''(t) - \left(a - 2q\ Cosh(2t) + \dfrac{\Lambda(\Lambda-1)}{Sinh^2(t)} \right) = 0 \\ g(t) = \left(Sinh^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}} \sum\limits_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l} Cosh(2l\ t) \\ g(t) = \left(Sinh^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}} \sum\limits_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1} Cosh((2l+1)\,t) \\ g(t) = \left(Sinh^2(t)\right)^{-\frac{\Lambda}{2}} \sum\limits_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1} Sinh((2l+1)\,t) \\ g(t) = \left(Sinh^2(t)\right)^{-\frac{\Lambda}{2}} \sum\limits_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+2} Sinh((2l+2)\,t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = Sin(t) \\ g''(t) + \left(a - 2q\ Cos(2t) - \dfrac{\Lambda(\Lambda-1)}{Cos^2(t)} \right) g(t) = 0 \\ g(t) = \left(Cos^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}} \sum\limits_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l} Cos(2l\ t) \\ g(t) = \left(Cos^2(t)\right)^{-\frac{\Lambda}{2}} \sum\limits_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1} Cos((2l+1)\,t) \\ g(t) = \left(Cos^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}} \sum\limits_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1} Sin((2l+1)\,t) \\ g(t) = \left(Cos^2(t)\right)^{-\frac{\Lambda}{2}} \sum\limits_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+2} Sin((2l+2)\,t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = i\ Sinh(t) \\ g''(t) - \left(a - 2q\ Cosh(2t) - \dfrac{\Lambda(\Lambda-1)}{Cosh^2(t)} \right) g(t) = 0 \\ g(t) = \left(Cosh^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}} \sum\limits_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l} Cosh(2l\ t) \\ g(t) = \left(Cosh^2(t)\right)^{-\frac{\Lambda}{2}} \sum\limits_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1} Cosh((2l+1)\,t) \\ g(t) = \left(Cosh^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}} \sum\limits_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1} Sinh((2l+1)\,t) \\ g(t) = \left(Cosh^2(t)\right)^{-\frac{\Lambda}{2}} \sum\limits_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+2} Sinh((2l+2)\,t) \end{cases}$$

Le gros inconvénient de ces constructions c'est qu'elles ne convergent pas rapidement, voir pas du tout au delà d'un certain rayon de convergence.

La question que l'on se pose immédiatement : existe-t-il une autre forme de construction pour les fonctions de Mathieu associées modifiées dont la convergence serait plus rapide. Je pense notamment à des constructions comme celles des fonctions de Mathieu modifiées à l'aide de fonctions de Bessel.

Commençons par l'équation $w''(t) + 2\Lambda\ Cotanh(t)\, w'(t) - \left(a - \Lambda^2 - 2q\ Cosh(2t)\right) w(t) = 0$ *et écrivons sa version algébrique à l'aide du changement de variable* $\xi = 2\sqrt{q}\ Cosh(t)$*, il vient :*

$$\left(\xi^2 - 4q\right) w''(\xi) + (1 + 2\Lambda)\, \xi\ w'(\xi) + \left(\xi^2 + \Lambda^2 - a - 2q\right) w(\xi) = 0$$

La forme « asymptotique de cette «équation différentielle est la suivante :

$$\xi^2 w''(\xi) + (1 + 2\Lambda)\, \xi\ w'(\xi) + \left(\xi^2 + \Lambda^2 - a - 2q\right) w(\xi) = 0$$

Avec le changement de fonction : $w(\xi) = \xi^{-\Lambda} v(\xi)$*, il vient :*

$$\xi^2 \left(1 - \frac{4\,q}{\xi^2}\right) v''(\xi) + \left(1 + \frac{8\,q\,\Lambda}{\xi^2}\right) \xi\ w'(\xi) + \left(\xi^2 - a - 2q - 4q\, \frac{\Lambda(1+\Lambda)}{\xi^2}\right) w(\xi) = 0$$

Cette équation a pour solution asymptotique en ξ grand :

$$\xi^2\ v''(\xi)+\xi\ v'(\xi)+\left(\xi^2-a-2q\right)v(\xi)=0 \Rightarrow v(\xi)=J_{\sqrt{a+2q}}(\xi)$$

On peut donc proposer de construire une solution de l'équation :

$$w''(t)+2\Lambda\ Cotanh(t)\,w'(t)-\left(a-\Lambda^2-2q\ Cosh(2t)\right)w(t)=0$$

Sous la forme d'une série : $w(t)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}\gamma_l Y_l(t) \qquad Y_l(t)=(Cosh(t))^{-\Lambda}J_l\left(2\sqrt{q}\ Cosh(t)\right)$

Comme les fonctions Y(ξ) sont solutions de l'équation différentielle :

$$\xi^2\ Y_l''(\xi)+(1+2\Lambda)\,\xi\ Y_l'(\xi)+\left(\xi^2+\Lambda^2-l^2\right)Y_{2l}(\xi)=0$$

Et que la forme algébrique de l'équation différentielle des fonctions w est la suivante :

$$E\{w,\xi\}=\left(\xi^2-4q\right)w''(\xi)+(1+2\Lambda)\,\xi\ w'(\xi)+\left(\xi^2+\Lambda^2-a-2q\right)w(\xi)=0$$

Il vient :

$$E\{w,\xi\}=0\Rightarrow\sum_{l=0}^{l=+\infty}\gamma_{2l}\left(\left(\xi^2-4q\right)Y_l''(\xi)+(1+2\Lambda)\,\xi\ Y_l'(\xi)+\left(\xi^2+\Lambda^2-a-2q\right)Y_l(\xi)\right)=0$$

$$Or\quad \xi^2\ Y_{2l}''(\xi)=-(1+2\Lambda)\,\xi\ Y_l'(\xi)-\left(\xi^2+\Lambda^2-l^2\right)Y_l(\xi)\Rightarrow\sum_{l=0}^{l=+\infty}\gamma_l\left(l^2-a-2q\right)Y_l(\xi)=4q\sum_{l=0}^{l=+\infty}\gamma_l Y_l''(\xi)$$

Or l'expression $Y_l''(\xi)$ *peut être « linéarisée» à l'aide de ses proches voisins :* $Y_{l-2}(\xi), Y_l(\xi), Y_{l+2}(\xi)$*, dont voici l'expression :*

$$\begin{cases} A_l=\frac{1}{4}\left(1-\frac{\Lambda}{l}\right)\left(1-\frac{\Lambda}{l-1}\right) \\ B_l=-\frac{1}{4}\left(\left(1+\frac{\Lambda}{l}\right)\left(1-\frac{\Lambda}{l+1}\right)+\left(1-\frac{\Lambda}{l}\right)\left(1+\frac{\Lambda}{l-1}\right)\right) \\ C_l=\frac{1}{4}\left(1+\frac{\Lambda}{l}\right)\left(1+\frac{\Lambda}{l+1}\right)\end{cases}\rightarrow Y_l''(\xi)=C_l\ Y_{l+2}(\xi)+B_l Y_l(\xi)+A_l\ Y_{l-2}(\xi)$$

Il vient donc finalement la loi de récurrence à trois termes lorsque l'on annule chaque terme $Y_l(\xi)$ *dans la sommation :*

$$q\ \frac{(l-2+\Lambda)(l-1+\Lambda)}{(l-2)(l-1)}\gamma_{l-2}+\left(a-l^2+2q\ \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{l^2-1}\right)\gamma_l+q\ \frac{(l+2-\Lambda)(l+1-\Lambda)}{(l+2)(l+1)}\gamma_{l+2}=0$$

Cette récurrence redonne bien la récurrence du développement des fonctions de Mathieu modifiées lorsque Λ=0, de la forme : $w(t)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}\gamma_l J_l\left(2\sqrt{q}\ Cosh(t)\right)$*, qui est celle des fonctions de Mathieu (à un changement de signe près) :* $q\ \gamma_{l-2}+\left(a-j^2\right)\gamma_l+q\ \gamma_{l+2}=0$.

Il me semble dans ces conditions que nous nageons dans le bonheur, mais tout s'effondre en réalité car le premier terme du développement hélas ne respecte pas la règle de « linéarisation » : en effet cette expressions n'est pas définie pour l=0 et l=1. Cela se concrétise également par l'apparition dans la récurrence à trois termes de pôles justement pour l=-1, l=1,l=-2 et l=2. (Une récurrence de forme similaire est étudiée dans l'article de 1950 de R. Campbell « CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE MATHIEU ASSOCIÉE », pages 214 et suivantes, mais elle s'avère justement fausse de part une petite erreur de calcul, mais aussi pour avoir négligé de tester l'application de cette récurrence au premiers termes du développement).

Reprenons ainsi le premier terme du développement l=0 par exemple :

$$Y_0(\xi)=\xi^{-\Lambda}J_0(\xi)\rightarrow\begin{cases}Y_0'(\xi)=-\xi^{-\Lambda}J_1(\xi)-\Lambda\xi^{-\Lambda-1}J_0(\xi)=-Y_1(\xi)-\Lambda\dfrac{Y_0(\xi)}{\xi}\qquad Or\quad \dfrac{Y_1(\xi)}{\xi}=\dfrac{1}{2}\left(Y_0(\xi)+Y_2(\xi)\right)\\ Y_0''(\xi)=-\xi^{-\Lambda}J_1'(\xi)+2\Lambda\xi^{-\Lambda-1}J_1(\xi)+\Lambda(\Lambda+1)\xi^{-\Lambda-2}J_0(\xi)=-Y_0(\xi)+(1+2\Lambda)\dfrac{Y_1(\xi)}{\xi}+\dfrac{\Lambda(\Lambda+1)}{\xi^2}Y_0(\xi)\\ =-\dfrac{1-2\Lambda}{2}Y_0(\xi)+\dfrac{1+2\Lambda}{2}Y_2(\xi)+\dfrac{\Lambda(\Lambda+1)}{\xi^2}Y_0(\xi)\end{cases}$$

En injectant ce premier terme dans l'équation différentielle, il vient :

$$\begin{aligned}&\gamma_0(-a-2q)Y_0(\xi)=4q\gamma_0Y_0''(\xi)=4q\gamma_0\left(-\frac{1-2\Lambda}{2}Y_0(\xi)+\frac{1+2\Lambda}{2}Y_2(\xi)+\frac{\Lambda(\Lambda+1)}{\xi^2}Y_0(\xi)\right)\\&\Leftrightarrow-\gamma_0\left((a+4\Lambda)Y_0(\xi)+2q(1+2\Lambda)Y_2(\xi)\right)=\gamma_0 4q\frac{\Lambda(\Lambda+1)}{\xi^2}Y_0(\xi)\end{aligned}$$

Si maintenant on introduit l'équation inhomogène suivante :

$$\begin{cases}E\left\{\sum_{l=0}^{l=+\infty}\gamma_iY_l(\xi),\xi\right\}=\gamma_0 4q\dfrac{\Lambda(\Lambda+1)}{\xi^2}Y_0(\xi)\\ \tilde{\tilde{w}}(\xi)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}\gamma_iY_l(\xi)+\tilde{w}(\xi)\\ E\{\tilde{w},\xi\}=(\xi^2-4q)\tilde{w}''(\xi)+(1+2\Lambda)\,\xi\,\tilde{w}'(\xi)+(\xi^2+\Lambda^2-a-2q)\tilde{w}(\xi)=-\gamma_0 4q\dfrac{\Lambda(\Lambda+1)}{\xi^2}Y_0(\xi)\end{cases}$$
$$\Rightarrow E\{\tilde{\tilde{w}},\xi\}=0\Leftrightarrow(\xi^2-4q)\tilde{\tilde{w}}''(\xi)+(1+2\Lambda)\,\xi\,\tilde{\tilde{w}}'(\xi)+(\xi^2+\Lambda^2-a-2q)\tilde{\tilde{w}}(\xi)=0$$

Est-il possible de construire un développement effectif de la solution de l'équation différentielle de Mathieu associée modifiée intermédiaire ? Pour cela pouvons-nous construire simplement une solution particulière de l'équation inhomogène :

$$(\xi^2-4q)\tilde{w}''(\xi)+(1+2\Lambda)\,\xi\,\tilde{w}'(\xi)+(\xi^2+\Lambda^2-a-2q)\tilde{w}(\xi)=-\gamma_0 4q\frac{\Lambda(\Lambda+1)}{\xi^2}Y_0(\xi)$$

A ce stade je n'ai pas trouvé de solution particulière à cette équation inhomogène.

Le fait d'aboutir à une impasse pour la construction des solutions de la forme $w(t)=\frac{1}{Cosh^{\Lambda}(t)}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\gamma_l J_l\left(2\sqrt{q}\ Cosh(t)\right)$ *pour les solutions périodiques est somme toute normale, car ce sont en réalité les solutions radiales de l'équation des ondes sphéroïdales. Pour cela reprenons une solution non nécessairement périodique pour l'équation de Mathieu associée modifiée :* $w(\tilde{\nu},t)=\frac{1}{Cosh^{\Lambda}(t)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}\gamma_l J_{\tilde{\nu}+2l}\left(2\sqrt{q}\ Cosh(t)\right)$*, elle suit la récurrence suivante :*

$$q\,\frac{(\tilde{\nu}+2l-2+\Lambda)(\tilde{\nu}+2l-1+\Lambda)}{(\tilde{\nu}+2l-2)(\tilde{\nu}+2l-1)}\gamma_{l-1}+\left(a-(\tilde{\nu}+2l)^2+2q\,\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{(\tilde{\nu}+2l)^2-1}\right)\gamma_l+q\,\frac{(\tilde{\nu}+2l+2-\Lambda)(\tilde{\nu}+2l+1-\Lambda)}{(\tilde{\nu}+2l+2)(\tilde{\nu}+2l+1)}\gamma_{l+1}=0$$

Selon la valeur des paramètres : $\Lambda=\frac{1}{2}+\mu\quad q=\frac{\gamma^2}{4}\quad \tilde{\nu}=\nu+\frac{1}{2}\quad a=\omega+\frac{\gamma^2}{2}+\frac{1}{4}$*, cette récurrence s'écrit :* $A_l\gamma_{l-1}+(B_l-\omega)\gamma_l+C_l\gamma_{l+1}=0$*, avec les valeurs des coefficients :*

$$A_l=-\gamma^2\,\frac{(\nu+\mu+2l-1)(\nu+\mu+2l)}{(2\nu+4l-3)(2\nu+4l-1)}$$
$$B_l=(\nu+2l)(\nu+1+2l)-2\gamma^2\,\frac{(\nu+2l)(\nu+2l+1)+\mu^2-1}{(2\nu+4l-1)(2\nu+4l+3)}$$
$$C_l=-\gamma^2\,\frac{(\nu-\mu+2l+1)(\nu-\mu+2l+2)}{(2\nu+4l+3)(2\nu+4l+5)}$$

C'est bien la même récurrence obtenue pour la construction des fonctions d'ondes sphéroïdales radiales, et de plus le développement s'écrit effectivement de manière similaire.

$$x=Cosh(t)\qquad \gamma=2\sqrt{q}\qquad \tilde{\nu}=\nu+\frac{1}{2}$$
$$\left(Cosh^2(t)-1\right)^{-\frac{\mu}{2}}S_{\nu}^{(1),\mu}\left(x,\gamma^2\right)\propto\frac{1}{Cosh^{\Lambda}(t)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}r_{\nu,k}^{\mu}J_{\tilde{\nu}+2l}\left(2\sqrt{q}\ Cosh(t)\right)\propto w(t)$$
$$w(t)\propto\frac{1}{Cosh^{\Lambda}(t)}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\gamma_l J_{\tilde{\nu}+2l}\left(2\sqrt{q}\ Cosh(t)\right)$$

Il n'y a donc rien d'étonnant à ce que la récurrence ne marche pas pour les cas $\tilde{\nu}\ \ entier$ *puisque pour les fonctions sphéroïdales radiales la récurrence n'est pas définie pour v demi-entier.*

Conclusion : on peut effectivement construire des solutions non périodiques de l'équation de Mathieu associée modifiée intermédiaire de la forme $w(\tilde{\nu},t)=\frac{1}{Cosh^{\Lambda}(t)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}\gamma_l J_{\tilde{\nu}+2l}\left(2\sqrt{q}\ Cosh(t)\right)$ ***à la seule condition que*** $\tilde{\nu}$ ***ne soit pas un entier. Mais cela n'est pas vraiment un résultat supplémentaire puisque il s'agit de fonctions apparentées aux fonctions sphéroïdales radiales.***

Par contre lorsque $\tilde{\nu}$ ***est entier, ce qui correspond à des solutions périodiques pour v demi-entier, la construction de sous forme de ce développement*** $w(t)=\frac{1}{Cosh^{\Lambda}(t)}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\gamma_l J_l\left(2\sqrt{q}\ Cosh(t)\right)$ ***n'est pas possible.***

<u>Tableau synoptique de la construction de solutions de première espèce de l'équation de Mathieu associée modifiée et de l'équation de Mathieu associée modifiée intermédiaire à l'aide des fonctions de Bessel sphériques</u>

La récurrence générale des coefficients des développements des fonctions d'ondes sphéroïdales

$$A_k b^{\mu}_{\nu,k-2} + B_k b^{\mu}_{\nu,k-1} + C_k b^{\mu}_{\nu,k} + D_k b^{\mu}_{\nu,k+1} + E_k b^{\mu}_{\nu,k+2} = 0$$

$$\begin{cases} A_k = \gamma^2\left(\alpha^2 - 1\right)\dfrac{(\nu-\mu+k-1)(\nu-\mu+k)}{(2\nu+2k-3)(2\nu+2k-1)} \\ B_k = 2\,\alpha\,\gamma\,\dfrac{(\nu+k)(\nu-\mu+k)}{2\nu+2k-1} \\ C_k = (\nu+k)(\nu+k+1) + 2\gamma^2\left(\alpha^2-1\right)\dfrac{(\nu+k)(\nu+k+1)+\mu^2-1}{(2\nu+2k-1)(2\nu+2k+3)} - \lambda \\ D_k = 2\,\alpha\,\gamma\,\dfrac{(\nu+k+1)(\nu+\mu+k+1)}{2\nu+2k+3} \\ E_k = \gamma^2\left(\alpha^2-1\right)\dfrac{(\nu+\mu+k+1)(\nu+\mu+k+2)}{(2\nu+2k+3)(2\nu+2k+5)} \end{cases}$$

La récurrence générale des coefficients des développements des fonctions de Mathieu associées et des fonctions de Mathieu associées intermédiaires :

$$A_k\, b^{\Lambda}_{\nu,k-2} + B_k\, b^{\Lambda}_{\nu,k-1} + C_k\, b^{\Lambda}_{\nu,k} + D_k\, b^{\Lambda}_{\nu,k+1} + E_k\, b^{\Lambda}_{\nu,k+2} = 0 \qquad \gamma = 2\sqrt{q} \qquad a = \lambda + 2q + \frac{1}{4} \qquad \mu = \frac{1}{2} - \Lambda$$

$$\begin{cases} A_k = q\,\left(\alpha^2-1\right)\dfrac{(2\nu+2k-3+2\Lambda)(2\nu+2k-1+2\Lambda)}{(2\nu+2k-3)(2\nu+2k-1)} \\ B_k = \alpha\,\sqrt{q}\,\dfrac{(2\nu+2k)(2\nu+2k-1+2\Lambda)}{2\nu+2k-1} \\ C_k = \left(\nu+k+\dfrac{1}{2}\right)^2 + 2q\alpha^2 + 8\,q\left(\alpha^2-1\right)\dfrac{\Lambda(\Lambda-1)}{(2\nu+2k-1)(2\nu+2k+3)} - a \\ D_k = \alpha\,\sqrt{q}\,\dfrac{(2\nu+2k+2)(2\nu+2k+3-2\Lambda)}{2\nu+2k+3} \\ E_k = q\,\left(\alpha^2-1\right)\dfrac{(2\nu+2k+3-2\Lambda)(2\nu+2k+5-2\Lambda)}{(2\nu+2k+3)(2\nu+2k+5)} \end{cases}$$

Domaine $\xi = Cosh(t)$	Développement des solutions radiales de l'équation des ondes sphéroïdales $\left(1-\xi^2\right) y''(\xi) - 2\,\xi\, y'(\xi) + \left(\lambda + \gamma^2\left(1-\xi^2\right) - \frac{\mu^2}{1-\xi^2}\right) y(\xi) = 0$	Développement des solutions de l'équation de Mathieu associée modifiée $g''(t) - \left(a - 2\,q\,Cosh(2t) + \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Sinh^2(t)}\right) g(t) = 0$ et lien des solutions et des paramètres : $\gamma = 2\sqrt{q} \quad \Lambda = \frac{1}{2} - \mu \quad a = \lambda + \frac{1}{4} + 2q \quad g(t) = \left(Sinh^2(t)\right)^{\frac{1}{4}} y(\xi)$	Développement des solutions de l'équation de Mathieu associée modifiée intermédiaire : $w''(t) + 2\Lambda\,Cotanh(t)\,w'(t) - \left(a - \Lambda^2 - 2q\,Cosh(2t)\right) w(t) = 0$ et lien des solutions et des paramètres : $\gamma = 2\sqrt{q} \quad \Lambda = \frac{1}{2} - \mu \quad a = \lambda + \frac{1}{4} + 2q \quad w(t) = \left(Sinh^2(t)\right)^{-\frac{\Lambda}{2}} g(t)$	Récurrence et paramètre α
$\xi = Cosh(t) > 1$	$y(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{\nu,2k}^{\mu}\, \mathsf{P}_{\nu+2k}^{\mu}(0)\, j_{\nu+2k}\left(\gamma\sqrt{\xi^2-1}\right)$	$g(t) = \left(Sinh^2(t)\right)^{\frac{1}{4}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\nu,2k}^{\mu} \mathsf{P}_{\nu+2k}^{\mu}(0)\, j_{\nu+2k}\left(2\sqrt{q}\ Sinh(t)\right)$	$w(t) = \left(Sinh^2(t)\right)^{\frac{1}{4}-\frac{\Lambda}{2}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\nu,2k}^{\mu} \mathsf{P}_{\nu+2k}^{\mu}(0)\, j_{\nu+2k}\left(2\sqrt{q}\ Sinh(t)\right)$	Récurrence à trois termes et α=0
$\xi = Cosh(t) > 1$	$y(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{\nu,2k}^{\mu}\, \mathsf{P}_{\nu+2k}^{\mu}{}'(0)\, j_{\nu+2k}\left(\gamma\sqrt{\xi^2-1}\right)$	$g(t) = Cosh(t)\left(Sinh^2(t)\right)^{-\frac{1}{4}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\nu,2k}^{\mu} \mathsf{P}_{\nu+2k}^{\mu}{}'(0)\, j_{\nu+2k}\left(2\sqrt{q}\ Sinh(t)\right)$	$w(t) = \left(Sinh^2(t)\right)^{-\frac{1}{4}-\frac{\Lambda}{2}} Cosh(t) \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\nu,2k}^{\mu} \mathsf{P}_{\nu+2k}^{\mu}{}'(0)\, j_{\nu+2k}\left(2\sqrt{q}\ Sinh(t)\right)$	Récurrence à trois termes et α=0
$\xi = Cosh(t) > 1$	$y(\xi) = \left(\frac{(\xi-\alpha)^2}{(\xi-1)(\xi+1)}\right)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{\nu,k}^{\mu} j_{\nu+k}(\gamma\,(\xi-\alpha))$	$g(t) = \left(\frac{(Cosh(t)-\alpha)^2}{Sinh^2(t)}\right)^{\frac{1}{4}-\frac{\Lambda}{2}} \left(Sinh^2(t)\right)^{\frac{1}{4}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\nu,k}^{\mu} j_{\nu+k}\left(2\sqrt{q}\ (Cosh(t)-\alpha)\right)$	$w(t) = (Cosh(t)-\alpha)^{\frac{1}{2}-\Lambda} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\nu,k}^{\mu} j_{\nu+k}\left(2\sqrt{q}\ (Cosh(t)-\alpha)\right)$	Récurrence à cinq termes et α quelconque
$\xi = Cosh(t) > 1$	$y(\xi) = \left(\frac{(\xi-1)(\xi+1)}{(\xi+\alpha)^2}\right)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{b_{\nu,k}^{\mu}}{\Gamma(-\nu-k-\mu)\Gamma(1+\nu+k-\mu)} j_{\nu+k}\left(\gamma\,(\xi+\alpha)\right)$	$g(t) = \left(\frac{(Cosh(t)+\alpha)^2}{Sinh^2(t)}\right)^{\frac{\Lambda}{2}-\frac{1}{4}} \left(Sinh^2(t)\right)^{\frac{1}{4}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{b_{\nu,k}^{\mu}}{\Gamma(-\nu-k-\mu)\Gamma(1+\nu+k-\mu)} j_{\nu+k}\left(2\sqrt{q}\ (Cosh(t)+\alpha)\right)$	$w(t) = (Cosh(t)+\alpha)^{\Lambda-\frac{1}{2}} \left(Sinh^2(t)\right)^{\frac{1}{2}-\Lambda} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{b_{\nu,k}^{\mu}}{\Gamma(-\nu-k-\mu)\Gamma(1+\nu+k-\mu)} j_{\nu+k}\left(2\sqrt{q}\ (Cosh(t)+\alpha)\right)$	Récurrence à cinq termes et α quelconque
$\xi = Cosh(t) > 1$	$y(\xi) = \left(1-\frac{1}{\xi^2}\right)^{-\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{\nu,2k}^{\mu} j_{\nu+2k}(\gamma\ \xi)$	$g(t) = \left(Tanh^2(t)\right)^{-\left(\frac{1}{4}-\frac{\Lambda}{2}\right)} \left(Sinh^2(t)\right)^{\frac{1}{4}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\nu,2k}^{\mu} j_{\nu+2k}\left(2\sqrt{q}\ Cosh(t\right.$	$w(t) = (Cosh(t))^{\frac{1}{2}-\Lambda} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\nu,2k}^{\mu} j_{\nu+2k}\left(2\sqrt{q}\ Cosh(t)\right)$	Récurrence à trois termes et α=0
$\xi = Cosh(t) > 1$	$y(\xi) = \left(1-\frac{1}{\xi^2}\right)^{+\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{b_{\nu,k}^{\mu}}{\Gamma(-\nu-2k-\mu)\Gamma(1+\nu+2k-\mu)} j_{\nu+2k}(\gamma\ \xi$	$g(t) = \left(Tanh^2(t)\right)^{\frac{1}{4}-\frac{\Lambda}{2}} \left(Sinh^2(t)\right)^{\frac{1}{4}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{b_{\nu,k}^{\mu}}{\Gamma(-\nu-2k-\mu)\Gamma(1+\nu+2k-\mu)} j_{\nu+2k}\left(2\sqrt{q}\ Cosh(t)\right)$	$w(t) = (Cosh(t))^{\frac{1}{2}-\Lambda} \left(\frac{Sinh^2(t)}{Cosh^2(t)}\right)^{\frac{1}{2}-\Lambda} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{b_{\nu,k}^{\mu}}{\Gamma(-\nu-2k-\mu)\Gamma(1+\nu+2k-\mu)} j_{\nu+k}\left(2\sqrt{q}\ (Cosh(t))\right)$	Récurrence à trois termes et α=0
$\xi = Cosh(t) > 1$	$y(\xi) = \left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{\nu,k}^{\mu} j_{\nu+k}(\gamma\,(\xi+1))$	$g(t) = \left(\frac{Cosh(t)+1}{Cosh(t)-1}\right)^{\frac{1}{4}-\frac{\Lambda}{2}} \left(Sinh^2(t)\right)^{\frac{1}{4}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\nu,k}^{\mu} j_{\nu+k}\left(2\sqrt{q}\ (Cosh(t)+1)\right)$	$w(t) = (Cosh(t)+1)^{\frac{1}{2}-\Lambda} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\nu,k}^{\mu} j_{\nu+k}\left(2\sqrt{q}\ (Cosh(t)+1)\right)$	Récurrence à trois termes et α=-1
$\xi = Cosh(t) > 1$	$y(\xi) = \left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{\nu,k}^{\mu} j_{\nu+k}(\gamma\,(\xi-1))$	$g(t) = \left(\frac{Cosh(t)-1}{Cosh(t)+1}\right)^{\frac{1}{4}-\frac{\Lambda}{2}} \left(Sinh^2(t)\right)^{\frac{1}{4}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\nu,k}^{\mu} j_{\nu+k}\left(2\sqrt{q}\ (Cosh(t)-1)\right)$	$w(t) = (Cosh(t)-1)^{\frac{1}{2}-\Lambda} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\nu,k}^{\mu} j_{\nu+k}\left(2\sqrt{q}\ (Cosh(t)-1)\right)$	Récurrence à trois termes et α=1

Domaine $\xi = Cosh(t)$	Développement des solutions radiales de l'équation des ondes sphéroïdales $(1-\xi^2)\,y''(\xi) - 2\,\xi\,y'(\xi) + \left(\lambda + \gamma^2(1-\xi^2) - \frac{\mu^2}{1-\xi^2}\right) y(\xi) = 0$	Développement des solutions de l'équation de Mathieu associée modifiée $g''(t) - \left(a - 2\,q\,Cosh(2t) + \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Sinh^2(t)}\right) g(t) = 0$ et lien des solutions et des paramètres : $\gamma = 2\sqrt{q}$ $\Lambda = \frac{1}{2} - \mu$ $a = \lambda + \frac{1}{4} + 2q$ $g(t) = \left(Sinh^2(t)\right)^{\frac{1}{4}} y(\xi)$	Développement des solutions de l'équation de Mathieu associée modifiée intermédiaire : $w''(t) + 2\Lambda\,Cotanh(t)\,w'(t) - \left(a - \Lambda^2 - 2q\,Cosh(2t)\right) w(t) = 0$ et lien des solutions et des paramètres : $\gamma = 2\sqrt{q}$ $\Lambda = \frac{1}{2} - \mu$ $a = \lambda + \frac{1}{4} + 2q$ $w(t) = \left(Sinh^2(t)\right)^{-\frac{\Lambda}{2}} g(t)$	*Récurrence et paramètre α*
$\xi > 1$	$y(\xi) = \left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{b_{\nu,k}^{\mu}}{\Gamma(-\nu-k-\mu)\Gamma(1+\nu+k-\mu)} j_{\nu+k}(\gamma(\xi+1))$	$g(t) = \left(\frac{Cosh(t)-1}{Cosh(t)+1}\right)^{\frac{1}{4}-\frac{\Lambda}{2}} \left(Sinh^2(t)\right)^{\frac{1}{4}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{b_{\nu,k}^{\mu}}{\Gamma(-\nu-k-\mu)\Gamma(1+\nu+k-\mu)} j_{\nu+k}\left(2\sqrt{q}\,(Cosh(t)+1)\right)$	$w(t) = \left(Cosh(t)-1\right)^{\frac{1}{2}-\Lambda} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{b_{\nu,k}^{\mu}}{\Gamma(-\nu-k-\mu)\Gamma(1+\nu+k-\mu)} j_{\nu+k}\left(2\sqrt{q}\,(Cosh(t)+1)\right)$	*Récurrence à trois termes et α=-1*
$\xi > 1$	$y(\xi) = \left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{b_{\nu,k}^{\mu}}{\Gamma(-\nu-k-\mu)\Gamma(1+\nu+k-\mu)} j_{\nu+k}(\gamma(\xi-1))$	$g(t) = \left(\frac{Cosh(t)+1}{Cosh(t)-1}\right)^{\frac{1}{4}-\frac{\Lambda}{2}} \left(Sinh^2(t)\right)^{\frac{1}{4}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{b_{\nu,k}^{\mu}}{\Gamma(-\nu-k-\mu)\Gamma(1+\nu+k-\mu)} j_{\nu+k}\left(2\sqrt{q}\,(Cosh(t)-1)\right)$	$w(t) = \left(Cosh(t)+1\right)^{\frac{1}{2}-\Lambda} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{b_{\nu,k}^{\mu}}{\Gamma(-\nu-k-\mu)\Gamma(1+\nu+k-\mu)} j_{\nu+k}\left(2\sqrt{q}\,(Cosh(t)-1)\right)$	*Récurrence à trois termes et α=1*
$\xi = Cosh(t) > 1$	$y(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{\nu,k}^{\mu}\, \mathsf{P}_{\nu+k}^{\mu}\left(\pm\frac{1}{\xi}\right) j_{\nu+k}(\gamma\,\xi)$	$g(t) = \left(Sinh^2(t)\right)^{\frac{1}{4}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\nu,k}^{\mu} \mathsf{P}_{\nu+k}^{\mu}\left(\pm\frac{1}{Cosh(t)}\right) j_{\nu+k}\left(2\sqrt{q}\,Cosh(t)\right)$	$w(t) = \left(Sinh^2(t)\right)^{\frac{1}{4}-\frac{\Lambda}{2}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\nu,k}^{\mu} \mathsf{P}_{\nu+k}^{\mu}\left(\pm\frac{1}{Cosh(t)}\right) j_{\nu+k}\left(2\sqrt{q}\,Cosh(t)\right)$	*Récurrence à trois termes et α=1 ou α=-1*

Dans le cas où Λ=0 (fonction de Mathieu) alors la récurrence générale s'écrit :

$$A_k\ b^0_{\nu,k-2} + B_k\ b^0_{\nu,k-1} + C_k\ b^0_{\nu,k} + D_k\ b^0_{\nu,k+1} + E_k\ b^0_{\nu,k+2} = 0$$

$$\begin{cases} A_k = q\left(\alpha^2 - 1\right) \\ B_k = \alpha\ \sqrt{q}\ (2\nu + 2k) \\ C_k = \left(\nu + k + \dfrac{1}{2}\right)^2 + 2q\alpha^2 - a \\ D_k = \alpha\ \sqrt{q}\ (2\nu + 2k + 2) \\ E_k = q\left(\alpha^2 - 1\right) \end{cases}$$

Lorsque α=0 alors la récurrence saute de deux en deux sur les indices k :

$$-q\ b^0_{\nu,k-2} + \left(\left(\nu + k + \frac{1}{2}\right)^2 - a\right) b^0_{\nu,k} - q\ b^0_{\nu,k+2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^0_{\nu,2k} = (-1)^k b^0_{\nu,2k} \Rightarrow q\ a^0_{\nu,2k-2} + \left(\left(\nu + 2k + \dfrac{1}{2}\right)^2 - a\right) a^0_{\nu,2k} + a\ b^0_{\nu,2k+2} = 0 \\ a^0_{\nu,2k+1} = (-1)^k b^0_{\nu,2k+1} \Rightarrow q\ a^0_{\nu,2k-1} + \left(\left(\nu + 2k + 1 + \dfrac{1}{2}\right)^2 - a\right) a^0_{\nu,2k+1} + q\ a^0_{\nu,2k+3} = 0 \end{cases}$$

Cela correspond donc bien à la récurrence des coefficients du développement de la fonction de Mathieu angulaire à un changement de paramètre près.

<u>Le tableau synoptique suivant reprend les développements possibles de la fonction de Mathieu radiale (ou modifiée) :</u>

Développement des solutions de l'équation de Mathieu modifiée $g''(t) - (a - 2\ q\ Cosh(2t))g(t) = 0$	*Récurrence et paramètre α*
$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b^0_{\nu,2k} \mathrm{P}^{\frac{1}{2}}_{\nu+2k}(0)\, J_{\nu+\frac{1}{2}+2k}\left(2\sqrt{q}\ Sinh(t)\right)$	*Récurrence à trois termes et α=0*
$g(t) = Cotanh(t) \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b^0_{\nu,2k} \mathrm{P}^{\frac{1}{2}}_{\nu+2k}{}'(0)\, J_{\nu+2k}\left(2\sqrt{q}\ Sinh(t)\right)$	*Récurrence à trois termes et α=0*
$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b^0_{\nu,k} J_{\nu+\frac{1}{2}+k}\left(2\sqrt{q}\ (Cosh(t) - \alpha)\right)$	*Récurrence à cinq termes et α quelconque*
$g(t) = \dfrac{\left(Sinh^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}}{Cosh(t) + \alpha} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \dfrac{b^{\mu}_{\nu,k}}{\Gamma(-\nu - k - \mu)\Gamma(1 + \nu + k - \mu)} J_{\nu+k}\left(2\sqrt{q}\ (Cosh(t) + \alpha)\right)$	*Récurrence à cinq termes et α quelconque*
$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b^0_{\nu,2k} J_{\nu+\frac{1}{2}+2k}\left(2\sqrt{q}\ Cosh(t)\right)$	*Récurrence à trois termes et α=0*
$g(t) = Tanh(t) \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b^0_{\nu,2k}\left(\frac{1}{2} + \nu + 2k\right) J_{\nu+\frac{1}{2}+2k}\left(2\sqrt{q}\ Cosh(t)\right)$	*Récurrence à trois termes et α=0*
$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b^0_{\nu,k} J_{\nu+\frac{1}{2}+k}\left(2\sqrt{q}\ (Cosh(t) + 1)\right)$	*Récurrence à trois termes et α=-1*
$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b^0_{\nu,k} J_{\nu+\frac{1}{2}+k}\left(2\sqrt{q}\ (Cosh(t) - 1)\right)$	*Récurrence à trois termes et α=1*
$g(t) = \left(\dfrac{Cosh(t) - 1}{Cosh(t) + 1}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b^0_{\nu,k}\left(\frac{1}{2} + \nu + k\right) J_{\nu+k}\left(2\sqrt{q}\ (Cosh(t) + 1)\right)$	*Récurrence à trois termes et α=-1*
$g(t) = \left(\dfrac{Cosh(t) + 1}{Cosh(t) - 1}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b^0_{\nu,k}\left(\frac{1}{2} + \nu + k\right) j_{\nu+k}\left(2\sqrt{q}\ (Cosh(t) - 1)\right)$	*Récurrence à trois termes et α=1*
$g(t) = \left(Tanh^2(t)\right)^{\frac{1}{4}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b^0_{\nu,k} \mathrm{P}^{\frac{1}{2}}_{\nu+k}\left(\pm\dfrac{1}{Cosh(t)}\right) J_{\nu+\frac{1}{2}+k}\left(2\sqrt{q}\ Cosh(t)\right)$	*Récurrence à trois termes et α=1 ou α=-1*

Pour lesquels on reconnaît déjà deux développements connus des fonctions radiales :

$$g(t)=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\nu,2k}^{0} J_{\nu+\frac{1}{2}+2k}\left(2\sqrt{q}\ Cosh(t)\right)$$

$$g(t)=Tanh(t)\ \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\nu,2k}^{0}\left(\frac{1}{2}+\nu+2k\right) J_{\nu+\frac{1}{2}+2k}\left(2\sqrt{q}\ Cosh(t)\right)$$

Or les expressions des fonctions de Ferrer sont :

$$\mathsf{P}_{\nu}^{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{Cos\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right) ArcCos(x)\right)}{\left(1-x^{2}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\mathsf{P}_{\nu}^{\frac{1}{2}}{}'(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(x\ \frac{Cos\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right) ArcCos(x)\right)}{2\left(1-x^{2}\right)^{\frac{5}{4}}}+\frac{\left(\nu+\frac{1}{2}\right) Sin\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right) ArcCos(x)\right)}{\left(1-x^{2}\right)^{\frac{3}{4}}}\right)$$

Cela conduit à évaluer les deux expressions comme suit :

$$ArcCos(0)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}\mathsf{P}_{\nu}^{\frac{1}{2}}(0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ Cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right)\\ \mathsf{P}_{\nu}^{\frac{1}{2}}{}'(0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right) Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right)\right)\end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases}\mathsf{P}_{\nu+2k}^{\frac{1}{2}}(0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ Cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)+k\pi\right)=(-1)^{k}\,\mathsf{P}_{\nu}^{\frac{1}{2}}(0)\\ \mathsf{P}_{\nu+2k}^{\frac{1}{2}}{}'(0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\left(\nu+2k+\frac{1}{2}\right) Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)+k\pi\right)\right)=(-1)^{k}\ \frac{\nu+\frac{1}{2}+2k}{\nu+\frac{1}{2}}\mathsf{P}_{\nu}^{\frac{1}{2}}{}'(0)\end{cases}$$

Le développement $g(t)=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\nu,2k}^{0}\mathsf{P}_{\nu+2k}^{\frac{1}{2}}(0)\, J_{\nu+\frac{1}{2}+2k}\left(2\sqrt{q}\ Sinh(t)\right)$ *s'écrit donc :*

$$g(t)=\mathsf{P}_{\nu}^{\frac{1}{2}}(0)\ \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\nu,2k}^{0}(-1)^{k} J_{\nu+\frac{1}{2}+2k}\left(2\sqrt{q}\ Sinh(t)\right)\propto\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\nu,2k}^{0}(-1)^{k} J_{\nu+\frac{1}{2}+2k}\left(2\sqrt{q}\ Sinh(t)\right)$$

et le développement $g(t)=Cotanh(t)\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\nu,2k}^{0}\mathsf{P}_{\nu+2k}^{\frac{1}{2}}{}'(0)\, J_{\nu+2k}\left(2\sqrt{q}\ Sinh(t)\right)$ *s'écrit sous la forme :*

$$g(t)=\frac{\mathsf{P}_{\nu}^{\frac{1}{2}}{}'(0)}{\nu+\frac{1}{2}}\ Cotanh(t)\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\nu,2k}^{0}(-1)^{k}\left(\nu+\frac{1}{2}+2k\right) J_{\nu+2k}\left(2\sqrt{q}\ Sinh(t)\right)\propto Cotanh(t)\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\nu,2k}^{0}(-1)^{k}\left(\nu+\frac{1}{2}+2k\right) J_{\nu+2k}\left(2\sqrt{q}\ Sinh(t)\right)$$

On reconnaît dans ces deux développements clairement des développements connus des fonctions de Mathieu modifiées.

<u>Développement de la fonction d'onde sphéroïdale radiale valable pour les valeurs μ demi-entières et des fonctions de Mathieu associées modifiées et intermédiaire valables pour Λ entier</u>

Au paragraphe 3.65 de l'ouvrage «Sphaeroid funktionen » de J.Meixner et F.W.Schafke en formule (49) page 293, les auteurs proposent un développement des deux solutions radiales de troisième et quatrième espèce qui est valable quelque soit les valeurs de μ, pour z dans tous le plan complexe hormis le demi-axe des réels de -∞ à 1. Il est donc valable pour les valeurs réelles de z de 1 à +∞ :

$$S_\nu^{\mu,(3)}(z,\gamma^2) = \left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{\mu}{2}} \frac{e^{i\left(\gamma z - \frac{\nu+1}{2}\pi\right)}}{\gamma z} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{\nu,l}^{\mu} \frac{z^{-l}}{(-2i\gamma)^l}$$

$$S_\nu^{\mu,(4)}(z,\gamma^2) = \left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{\mu}{2}} \frac{e^{-i\left(\gamma z - \frac{\nu+1}{2}\pi\right)}}{\gamma z} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{\nu,l}^{\mu} \frac{z^{-l}}{(2i\gamma)^l}$$

En injectant cette forme dans l'équation des ondes sphéroïdales et si la forme proposée doit respecter la condition de normalisation des fonctions radiales à l'infini, alors les coefficients du développement suivent une relation de récurrence à 4 termes :

$$\begin{cases} 4\gamma^2(l-\mu)(l-\mu-1)A_{\nu,l-2}^{\mu} + 4\gamma^2(l-\mu)A_{\nu,l-1}^{\mu} + \left(l(l+1) - \lambda_\nu^\mu(\gamma^2)\right)A_{\nu,l}^{\mu} + (l+1)A_{\nu,l+1}^{\mu} = 0 \\ A_{\nu,-2}^{\mu} = A_{\nu,-1}^{\mu} = 0 \qquad A_{\nu,0}^{\mu} = 1 \end{cases}$$

Dans le cas où μ est demi-entier alors cette récurrence est parfaitement définie pour toute valeurs de l'indice l, et la forme des fonctions radiales de première et deuxième espèce définie comme suit est donc parfaitement définie pour μ demi-entier et ν demi-entier, cas qui nous occupe particulièrement car jusqu'à présent aucun développement n'était défini pour ce cas.

$$S_\nu^{\mu,(1)}(z,\gamma^2) = \mathrm{Re}\left\{\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{\mu}{2}} \frac{e^{i\left(\gamma z - \frac{\nu+1}{2}\pi\right)}}{\gamma z} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{\nu,l}^{\mu} \frac{z^{-l}}{(-2i\gamma)^l}\right\} \qquad S_\nu^{\mu,(2)}(z,\gamma^2) = \mathrm{Im}\left\{\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{\mu}{2}} \frac{e^{i\left(\gamma z - \frac{\nu+1}{2}\pi\right)}}{\gamma z} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{\nu,l}^{\mu} \frac{z^{-l}}{(-2i\gamma)^l}\right\}$$

Pour les fonctions de Mathieu associées modifiées respectant l'équation différentielle :

$$g''(t)-\left(a-2\,q\,Cosh(2t)+\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{Sinh^2(t)}\right)g(t)=0$$

Avec comme lien des solutions et des paramètres avec l'équation différentielle des ondes sphéroïdales :

$$\gamma=2\sqrt{q}\quad \Lambda=\frac{1}{2}-\mu\quad a=\lambda+\frac{1}{4}+2q\quad g(t)=\left(Sinh^2(t)\right)^{\frac{1}{4}}y(\xi)\quad \xi=Cosh(t)$$

La récurrence s'écrira comme suit :

$$\begin{cases}4\,q\,(2l+2\Lambda-1)(2l+2\Lambda-3)A^{\Lambda}_{\nu,l-2}+8\,q\,(2l+2\Lambda-1)A^{\Lambda}_{\nu,l-1}+\left(l\,(l+1)+\frac{1}{4}+2q-a\right)A^{\Lambda}_{\nu,l}+(l+1)A^{\Lambda}_{\nu,l+1}=0\\ A^{\Lambda}_{\nu,-2}=A^{\Lambda}_{\nu,-1}=0\qquad A^{\Lambda}_{\nu,0}=1\end{cases}$$

$$g_1(t)=\mathrm{Re}\left\{\left(Sinh^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}}Cosh^{\frac{1}{2}-\Lambda}(t)\frac{e^{i\left(2\sqrt{q}\,Cosh(t)-\frac{\nu+1}{2}\pi\right)}}{2\sqrt{q}\,Cosh(t)}\sum_{l=0}^{l=+\infty}A^{\Lambda}_{\nu,l}\,\frac{Cosh(t)^{-l}}{\left(-4i\sqrt{q}\right)^l}\right\}$$

$$g_2(t)=\mathrm{Im}\left\{\left(Sinh^2(t)\right)^{\frac{\Lambda}{2}}Cosh^{\frac{1}{2}-\Lambda}(t)\frac{e^{i\left(2\sqrt{q}\,Cosh(t)-\frac{\nu+1}{2}\pi\right)}}{2\sqrt{q}\,Cosh(t)}\sum_{l=0}^{l=+\infty}A^{\Lambda}_{\nu,l}\,\frac{Cosh(t)^{-l}}{\left(-4i\sqrt{q}\right)^l}\right\}$$

Pour les fonctions de Mathieu associées modifiées intermédiaires respectant l'équation différentielle :

$$w''(t)+2\Lambda\,Cotanh(t)\,w'(t)-\left(a-\Lambda^2-2q\,Cosh(2t)\right)w(t)=0$$

Avec comme lien des solutions et des paramètres avec l'équation différentielle de Mathieu associée :

$$w(t)=\left(Sinh^2(t)\right)^{-\frac{\Lambda}{2}}g(t)$$

$$w_1(t)=\frac{Cosh^{-\frac{1}{2}-\Lambda}(t)}{2\sqrt{q}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}A^{\Lambda}_{\nu,l}\,\frac{Cos\left(2\sqrt{q}\,Cosh(t)+\frac{(l-\nu-1)\pi}{2}\right)}{\left(4\sqrt{q}\right)^l Cosh^l(t)}$$

$$w_2(t)=\frac{Cosh^{-\frac{1}{2}-\Lambda}(t)}{2\sqrt{q}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}A^{\Lambda}_{\nu,l}\,\frac{Sin\left(2\sqrt{q}\,Cosh(t)+\frac{(l-\nu-1)\pi}{2}\right)}{\left(4\sqrt{q}\right)^l Cosh^l(t)}$$

Le cas des fonctions de Mathieu modifiée est obtenu pour Λ=0, soit :

$$w''(t)-\left(a-2q\ Cosh(2t)\right)w(t)=0$$

Avec comme lien des solutions et des paramètres avec l'équation différentielle de Mathieu associée :

$$\begin{cases} 4\,q\,(2l-1)(2l-3)A^0_{\nu,l-2}+8\,q\,(2l-1)A^0_{\nu,l-1}+\left(l\,(l+1)+\dfrac{1}{4}+2q-a\right)A^0_{\nu,l}+(l+1)A^0_{\nu,l+1}=0 \\ A^0_{\nu,-2}=A^0_{\nu,-1}=0 \qquad A^0_{\nu,0}=1 \end{cases}$$

$$w_1(t)=\frac{1}{2\sqrt{q}\ \sqrt{Cosh(t)}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}A^0_{\nu,l}\,\frac{Cos\left(2\sqrt{q}\ Cosh(t)+\dfrac{(l-\nu-1)\,\pi}{2}\right)}{\left(4\sqrt{q}\right)^l Cosh^l(t)}$$

$$w_2(t)=\frac{1}{2\sqrt{q}\ \sqrt{Cosh(t)}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}A^0_{\nu,l}\,\frac{Sin\left(2\sqrt{q}\ Cosh(t)+\dfrac{(l-\nu-1)\,\pi}{2}\right)}{\left(4\sqrt{q}\right)^l Cosh^l(t)}$$